2023 年宜荆荆随高三 10 月联考

高三数学参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	D	B	A	B	A	BCD	ABD	AC	BCD

1.D 【解析】$A=[4,5)$，$B=[3,5]$

2.A 【解析】$\dfrac{a^2+2i}{1-i}=\dfrac{a^2-2+(a^2+2)i}{2}$为纯虚数的充要条件为$a=\pm\sqrt{2}$

3.C 【解析】$S_{15}=15a_8\therefore 3a_1+21d=2a_1+6d+a_k,\therefore a_k=a_1+15d=a_{16}$，$\therefore k=16$ （或$d\neq 0$时$m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3\Leftrightarrow a_{m_1}+a_{m_2}+a_{m_3}=a_{n_1}+a_{n_2}+a_{n_3}$）

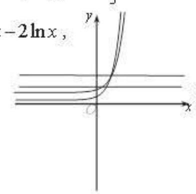
4.D 【解析】$\tan\alpha=-2,\therefore\tan\beta=\tan[\alpha-(\alpha-\beta)]=-7$

5.B 【解析】由全概率公式可得$0.3=0.2\times0.6+0.8p,\therefore p=\dfrac{9}{40}$

6.A 【解析】$\dfrac{2}{a}+\dfrac{4a+b}{b}=\dfrac{2(a+2b)}{a}+\dfrac{4a+b}{b}=3+4(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b})\geq 11$

7.B 【解析】由$\begin{cases}|MF_2|+|MN|+|NF_2|=4a\\|MF_2|+|NF_2|=2|MN|\end{cases}$得到$|MN|=\dfrac{4a}{3}$，设$|MF_2|=\dfrac{4a}{3}-d,|NF_2|=\dfrac{4a}{3}+d$，在$\triangle MF_2N$中由余弦定理得d=0, ∴ $\triangle MF_2N$为等边三角形，则在$\triangle MF_1F_2$中由$|F_1F_2|=\sqrt{3}|MF_1|$得e=$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8.A 【解析】由$c-a=2\ln\dfrac{c}{a}>0$得$c-2\ln c=a-2\ln a$且$c>a$，构造函数 $f(x)=x-2\ln x$，求导得$f(x)$在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增，所以得到$0<a<2<c$，做出函数$y=(\sqrt{10})^x$及$y=3^x+1$的图像，得到$0<a<b<2$所以$0<a<b<2<c$



9.BCD 【解析】$f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

10.ABD 【解析】A 选项根据正态曲线的对称性可得是正确的. B 选项$P(B|A)=P(B)$得$\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$，即$P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件 A,B 相互独立，所以结论正确.C 选项$|r|$越接近于 1，相关性越强.D 选项代入$s^2=\dfrac{1}{n}\left[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2\right]$检验即可得出是正确的

11.AC 【解析】由 $A(1,-4)$在抛物线上可得抛物线方程为$y^2=16x$，F(4,0),当过焦点且与 x 轴垂直时弦长最短，此时弦长为 16，故 A 正确，B 错误；设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，由重心的坐标公式得$\begin{cases}x_1+x_2=11\\y_1+y_2=4\end{cases}$所以 MN 的中点坐标为$\left(\dfrac{11}{2},2\right)$，$|MF|+|NF|=x_1+x_2+p=19$，因为 MM 不过焦点 F,所以$|MF|+|NF|>|MN|$，MN 的中点到准线的距离为$\dfrac{19}{2}>\dfrac{|MN|}{2}$，所以 C 正确，D 错误

12.BCD 【解析】方法一:坐标法，以 D 为坐标原点，直线 DA 为 x 轴，DC 为 y 轴，DD_1 为 Z 轴，则 P 点的坐标满足$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=4\\z=2\end{cases}$，同理 Q 点的坐标满足$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\z=0\end{cases}$可设 P 的坐标为$(2+2\cos\theta,2\sin\theta,2)$，$\theta\in(0,\pi)$解决选项 C, D. 其中 D 选项可设球心坐标为 M(2,2,t)，利用 MC=MP 得到$t=2-2\sin\theta$，求出$t\in[0,2)$，所以外接球的半径 $R\in[4,8)$，所以 D 选项正确

方法二：几何法，C 选项$CP=\sqrt{CC_1^2+C_1P^2}=\sqrt{4+C_1P^2}$，$C_1P\geq 2\sqrt{2}-2$，所以 C 正确

D 选项根据对称性分别求 P 在端点和弧中点时对应的外接球半径即可.

13. -7 【解析】$n=8$

14. 160 【解析】排除法：$C_7^3C_4^2C_2^2-C_5^1C_4^2C_2^2-C_2^1C_5^3C_2^2=160$

15. $(1,3)$ 【解析】由题意 $f(x)$ 图像关于$x=1$对称，且在$(-\infty,1)$上递减，$(1,+\infty)$上递增，$f(3)=f(-1)=2$，不等式可化为$\begin{cases}f(x)>2\\\ln x<0\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)<2\\\ln x>0\end{cases}$解出解集为$(1,3)$

16. $\dfrac{1000\sqrt{3}}{27}$ 【解析】设正四棱锥的底面边长为$2x$，，则高为$\sqrt{25-x^2}$，体积$V=\dfrac{4}{3}x^2\sqrt{25-x^2}$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}x^2\bullet x^2\bullet(50-2x^2)}\leq\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+x^2+50-2x^2}{3}\right)^3}=\frac{1000\sqrt{3}}{27},$$

当且仅当$x^2=\dfrac{50}{3}$时取等号 . 也可以用导数方法求最值.

17. 【解析】(1) 由$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$及正弦定理得$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$

又$\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$\sin C>0$

所以$\sqrt{3}\sin A=\cos A+1\Rightarrow\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$

$\because A\in(0,\pi),\therefore A-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right),\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},A=\dfrac{\pi}{3}$ ……(5′)

(2) 因为 D 为 BC 中点，所以$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，两边平方得

$\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC})$，因为$AD=2,A=\dfrac{\pi}{3}$，所以得到$16=c^2+b^2+bc$

由$b^2+c^2\geq 2bc$，$\therefore bc\leq\dfrac{16}{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\leq\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$\therefore b=c$即$\triangle ABC$为等边三角形时$\triangle ABC$面积的最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ……(10′)

（另法：在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中由余弦定理及$\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$也可得到 b, c 的关系式，后面的步骤同上面，酌情给分）

18.【解析】（1）$\because PA\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp BC$，

$\because ABCD$为矩形，$\therefore AB\perp BC$，又 $PA\cap AB=A$，PA，$AB\subset$平面PAB，$\therefore BC\perp$平面PAB，

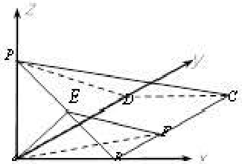
$\therefore AE\subset$平面PAB，$\therefore AE\perp BC$，$\because PA=AB$，E为线段PB的中点，$\therefore AE\perp PB$，

又 $PB\cap BC=B$，PB，$BC\subset$平面PBC，

$\therefore AE\perp$平面PBC，又$AE\subset$平面AEF，所以平面$AEF\perp$平面PBC；　……(5')

（2）以A为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$，

则$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,2,0)$ $P(0,0,1)$ $E\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，



$\therefore \overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PC}=(1,2,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$，

设$F(1,\lambda,0)$ $(0\le\lambda\le2)$，$\therefore \overrightarrow{AF}=(1,\lambda,0)$，

设平面AEF的一个法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x_1+z_1=0\\ x_1+\lambda y_1=0\end{cases}$，令$y_1=1$，则$\begin{cases}x_1=-\lambda\\ z_1=\lambda\end{cases}$，$\therefore \vec{n}=(-\lambda,1,\lambda)$，

设平面PCD的一个法向量为$\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}$，

$\therefore\begin{cases}x_2+2y_2-z_2=0\\ 2y_2-z_2=0\end{cases}$，令$y_2=1$，则$\begin{cases}x_2=0\\ z_2=2\end{cases}$，$\therefore \vec{m}=(0,1,2)$，

$\because$平面AEF与平面PCD所成的锐二面角为45°，

$\therefore |\cos45°|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|1+2\lambda|}{\sqrt{5}\times\sqrt{2\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\lambda=2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$，

$\because 0\le\lambda\le2$　$\therefore \lambda=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$即 $BF=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore$当 $BF=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$时，平面AEF与平面PCD所成的锐二面角为45°。　……(12')

19.【解析】（1）$f'(x)=2e^{2x}+(2-2a)e^x-2a=2(e^x+1)(e^x-a)$

①当$a\le0$时，因为$e^x>0$，所以$f'(x)>0$在R上恒成立，所以$f(x)$在R上单调递增

②当$a>0$时，令 $f'(x)=0$，得$x=\ln a$.

由$f'(x)>0\Rightarrow x\in(\ln a,+\infty)$，$\therefore f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增

由$f'(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,\ln a)$，$\therefore f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减

综上，当$a\le0$时$f(x)$在R上单调递增。

当$a>0$时$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递减在$(\ln a,+\infty)$上单调递增　……(5')

(2) $a=1$时，$f(x)=e^{2x}-2x-1$，$f'(x)=2e^{2x}-2$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=0$

且$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增

$\therefore f(x)_{min}=f(0)=0$

$\because x_2>0$　$\therefore x_2f(x_1)+g(x_2)>0\Leftrightarrow f(x_1)+\frac{1}{x_2}g(x_2)>0$对$\forall x_1\in R$成立

$\therefore f(x)_{min}+\frac{1}{x_2}g(x_2)>0$即$\frac{1}{x_2}g(x_2)>0$对$\forall x_2\in(0,+\infty)$恒成立

$\frac{g(x)}{x}=m-\frac{\ln x-1}{x}>0\Leftrightarrow m>\frac{\ln x-1}{x}$，令$h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$

则$h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e^2$，且$h(x)$在$(0,e^2)$上单调递增$(e^2,+\infty)$上单调递减，

$\therefore h(x)_{max}=h(e^2)=\frac{1}{e^2}$，$\therefore m>h(x)_{max}=\frac{1}{e^2}$，$\therefore m>\frac{1}{e^2}$　……(12')

20.【解析】(1)由 $a_n=-S_n+1(n\in N^*)$　①

得$n\ge2$时 $a_{n-1}=-S_{n-1}+1$　②

① - ②得$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$　$(n\ge2)$　　①中令$n=1$得 $a_1=\frac{1}{2}$

$\therefore\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首相，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$　……(5')

(2)$d_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n+1}=-\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

假设存在这样的三项d_m,d_k,d_t成等比数列，$\because\{d_n\}$为递增数列，不妨设$m<k<t$

则$d_m<d_k<d_t$，$\therefore d_k^2=d_md_t\Leftrightarrow\frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+2}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}\frac{1}{t+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{(k+1)^2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+2}=\dfrac{1}{(m+1)(t+1)}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m+t+2}$

$\because$ m,k,t 成等差数列 $\therefore 2k=m+t$ $\therefore (k+1)^2=(m+1)(t+1)\Rightarrow k^2=mt$

由 $\begin{cases}2k=m+t\\ k^2=mt\end{cases}\Rightarrow (m-t)^2=0\Rightarrow m=t=k$ 与题设矛盾

$\therefore$ 不存在这样的三项 d_m, d_k, d_t（其中 m,k,t 成等差数列） 成等比数列。 ……(12′)

21.【解析】(1)

列联表如下：单位：只

抗体	指标值		合计
	小于 60	不小于 60	
有抗体	100	220	320
没有抗体	40	40	80
合计	140	260	400

零假设为 H_0:注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 无关联.

根据列联表中数据，得 $\chi^2=\dfrac{400\times(100\times40-40\times220)^2}{320\times80\times140\times260}\approx 9.890>5.024=\alpha_{0.025}$

根据 $\alpha=0.025$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

即认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于 60 有关，此推断犯错误的概率不大于 0.025. ……(6′)

(2)(i) 令事件 A="小白鼠第一次注射疫苗产生抗体"，事件 B="小白鼠第二次注射疫苗产生抗体"，事件 C="小白鼠最多注射 2 次疫苗后产生抗体"，记事件 A，B，C 发生的概率分别为 $P(A), P(B), P(C)$，

则 $P(A)=\dfrac{320}{400}=\dfrac{4}{5}$，$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{60}{80}=\dfrac{3}{4}$，

$P(C)=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})=1-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{19}{20}$=0.95，

所以一只小白鼠最多注射 2 次疫苗后产生抗体的概率 $p=0.95$， ……(9′)

(ii) 由题意，知随机变量 $X\sim B(40,0.95)$，$P(X=k)=C_{40}^{k}\times0.95^k\times0.05^{40-k}(k=0,1,2,\cdots40)$，

因为 $P(X=k)$ 最大，

所以 $\begin{cases}C_{40}^{k}\times0.95^k\times0.05^{40-k}\ge C_{40}^{k-1}\times0.95^{k-1}\times0.05^{41-k}\\ C_{40}^{k}\times0.95^k\times0.05^{40-k}\ge C_{40}^{k+1}\times0.95^{k+1}\times0.05^{39-k}\end{cases}$，解得 $37.95\le k\le 38.95$,

$\because k$ 是整数，所以 $k=38$．（直接用期望公式得到结果不给分） ……(12′)

22.【解析】(1) 由 $e=2$ 得 $\dfrac{c}{a}=2$, 又 $c^2=a^2+b^2$ 得到 $b=\sqrt{3}a$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

则双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{3a^2}=1$ 即 $3x^2-y^2=3a^2$ 设 $M(x,y)$，则 M 到渐近线的距离分别为

$|MA|=\dfrac{|\sqrt{3}x-y|}{2}$，$|MB|=\dfrac{|\sqrt{3}x+y|}{2}$

两渐近线的夹角为 60°，$\because M,A,O,B$ 四点共圆，$\therefore \angle AMB=60^\circ$ 或 120°

$\therefore \Delta ABM$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}|MA||MB|\sin\angle AMB=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{|3x^2-y^2|}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$

$\Rightarrow a^2=1\Rightarrow x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$

$\therefore$ 曲线 C 的方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ ……(5′)

(2) 如图 $\because$ O,D,P,Q 四点共圆

$\therefore \begin{cases}\angle DPQ+\angle DOQ=\pi\\ \angle NOQ+\angle DOQ=\pi\end{cases}\Rightarrow \angle DPQ=\angle NOQ\Rightarrow \tan\angle DPQ=\tan\angle NOQ$

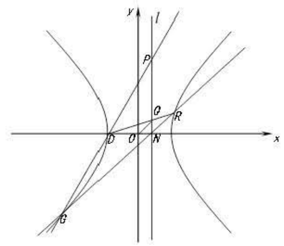
$\Rightarrow \dfrac{1}{\tan\angle ODP}=\tan\angle NOQ\Rightarrow k_{DP}.k_{OQ}=1$

设 $G(x_1,y_1), R(x_2,y_2), N(t,0), t\in(0,1)$.

$\because D(-1,0)$ $\therefore l_{DR}: y=\dfrac{y_2}{x_2+1}(x+1)$, 令 $x=t$ 得 $Q\left(t,\dfrac{y_2(t+1)}{x_2+1}\right)$

当 l_{GR} 的斜率为 0 时不符合题意

当 l_{GR} 的斜率不为 0 时，设 l_{GR}：$x=my+t$



$\begin{cases}x=my+t\\ 3x^2-y^2=3\end{cases}\Rightarrow (3m^2-1)y^2+6mty+3(t^2-1)=0$

$y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2-1}, y_1y_2=\dfrac{3(t^2-1)}{3m^2-1}$

$\therefore k_{DP}.k_{OQ}=\dfrac{y_1}{x_1+1}\bullet\dfrac{y_2(t+1)}{t(x_2+1)}=1$ 即 $\dfrac{t+1}{t}=\dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{y_1y_2}$

$\because \dfrac{(x_1+1)(x_2+1)}{y_1y_2}=\dfrac{m^2y_1y_2+m(t+1)(y_1+y_2)+(t+1)^2}{y_1y_2}=\dfrac{-\dfrac{(t+1)^2}{3m^2-1}}{\dfrac{3(t^2-1)}{3m^2-1}}=\dfrac{-(t+1)^2}{3(t^2-1)}$

$\therefore \dfrac{t+1}{t}=\dfrac{-(t+1)^2}{3(t^2-1)}\Rightarrow t=\dfrac{3}{4}\in(0,1)$，符合 $\therefore N\left(\dfrac{3}{4},0\right)$ ……(12′)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。