2023 届高三适应性模拟考试·数学
参考答案、提示及评分细则

1.【答案】B

【解析】因为 $M\cap N=M$,所以 $M\subseteq N$,所以 $a\leqslant-1$,故选 B.

2.【答案】A

【解析】由题意设 $z=a+bi(a>0,b>0)$,由 $|z+\bar{z}|=|2a|=2$,得 $a=1$,因为 $|z|=2$,所以 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+b^2}=2$,解得 $b=\sqrt{3}$,所以 $z=1+\sqrt{3}i$,所以 $\bar{z}=1-\sqrt{3}i$. 故选 A.

3.【答案】C

【解析】因为 AB 中点为 P,又 $|AB|=6$,所以 $|CP|=\sqrt{25-\left(\frac{6}{2}\right)^2}=4$,点 P 在以 C 为圆心,4 为半径的圆上,其轨迹方程为 $(x-2)^2+(y-4)^2=16$. 故选 C.

4.【答案】D

【解析】由题设 $l=h\tan\theta$,“晷影长”分别是“表高”的 $\frac{1}{3}$ 倍和 $\frac{1}{2}$ 倍时,$\tan\theta_1=\frac{1}{3}$,$\tan\theta_2=\frac{1}{2}$,

所以 $\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\cdot\tan\theta_2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=1$,故选 D.

5.【答案】C

【解析】设圆台的上底面的圆心为 O_1,下底面的圆心为 O,点 A 为上底面圆周上任意一点,

圆台的高为 h,球的半径为 R,则 $h=OO_1=\sqrt{R^2-O_1A^2}=\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}$,

$V=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}(4\pi+\sqrt{4\pi\cdot\pi}+\pi)\times\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$. 故选 C.

6.【答案】D

【解析】记第一次抽到红、绿、黄球的事件分别为 A_1,A_2,A_3,则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4}$,记第二次在红、绿、黄色口袋内抽到黄球的事件分别为 B_1,B_2,B_3,而 A_1,A_2,A_3 两两互斥,其和为 Ω,所以 $P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$,$P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}$,$P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$,记第二次抽到黄球的事件为 B,则 $P(B)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum\limits_{i=1}^{3}[P(A_i)\cdot P(B_i|A_i)]=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$,故选 D.

7.【答案】B

【解析】因为双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,得 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$,设直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 的倾斜角为 θ,则 $\tan\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

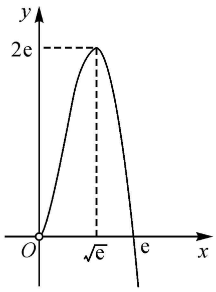
由对称性不妨令点 A,B 分别在第一、四象限,坐标原点为 O,则 $\angle AOB=2\theta$,

于是得 $\sin\angle AOB=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,而双曲线的虚半轴长为 b,即 $|OA|=|OB|=b$,显然四边形 $ABCD$ 为矩形,其面积 $S=4S_{\triangle AOB}=4\times\frac{1}{2}OA^2\sin\angle AOB=\frac{4\sqrt{2}}{3}b^2=12\sqrt{2}$,得 $b^2=$

9，所以 $a^2=2b^2=18$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{9}=1$．故选 B．

8.【答案】C

【解析】设直线与 $g(x)=x^2$ 的切点为 (x_1,x_1^2)，由 $g'(x)=2x$ 可知该直线的斜率为 $2x_1$，即该直线的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$，设直线与 $f(x)=a\ln x$ 的切点为 $(x_2,a\ln x_2)$，由 $f'(x)=\frac{a}{x}$ 可知该直线的斜率为 $\frac{a}{x_2}$，即该直线的方程为 $y-a\ln x_2=\frac{a}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\frac{a}{x_2}x+a(\ln x_2-1)$，因为函数 $f(x)=a\ln x(a>0)$ 和 $g(x)=x^2$ 有且只有一条公切线，所以 $\begin{cases}2x_1=\frac{a}{x_2},\\ a(\ln x_2-1)=-x_1^2,\end{cases}$ 即 $a=4x_2^2-4x_2^2\ln x_2$ 有唯一实根，令 $h(x)=4x^2-4x^2\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=8x-8x\ln x-4x=4x(1-2\ln x)$，当 $4x(1-2\ln x)>0$ 时，$0<x<\sqrt{e}$，当 $4x(1-2\ln x)<0$ 时，$x>\sqrt{e}$，即 $h(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，则 $h(x)$ 在 $x=\sqrt{e}$ 处取得最大值，$h(\sqrt{e})=4e-4e\times\frac{1}{2}=2e$，当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，$h(e)=0$，函数 $h(x)$ 图象如图所示，因为 $a=4x^2-4x^2\ln x$ 有唯一实根，所以只有 $a=2e$，故选 C．



9.【答案】BD

【解析】$\because \frac{T}{2}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore \omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\varphi\right)=1$，由于 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<\varphi+\frac{2\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}$，所以 $\varphi+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 A 选项错误，B 选项正确；

$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi$，$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，得 $x=\frac{\pi}{12}$，所以 $f(x)$ 关于 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 对称，C 选项错误；

$-\frac{\pi}{2}+2k_1\pi<2x-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$，$-\frac{\pi}{6}+k_1\pi<x<\frac{\pi}{3}+k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$，当 $k_1=1$ 时，得 $f(x)$ 在 $\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$ 上递增，则 $f(x)$ 在区间 $\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 D 选项正确．故选 BD．

10.【答案】BCD

【解析】连接 AC 交 BD 于 O 点，连接 OF,OE,ED，

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $AC\cap BD=O$，所以 O 为 BD 的中点，

因为 F 为 BD_1 的中点，所以 $OF/\!/DD_1$，且 $OF=\frac{1}{2}DD_1$，

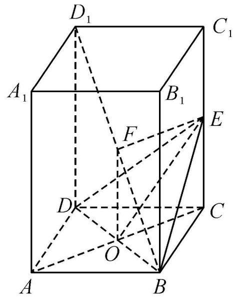
在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CC_1/\!/DD_1$，且 $CC_1=DD_1$，

$\because E$ 为 CC_1 的中点，则 $CE/\!/DD_1$，且 $CE=\frac{1}{2}DD_1$，$\therefore OF/\!/CE$，且 $OF=CE$，

所以四边形 $OCEF$ 为平行四边形，所以 $EF/\!/OC$，所以 $\angle BCO$ 为异面直线 EF 与 BC 所成的角或其补角，由已知底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle BAD=60°$，可知 $\angle BCO=30°$，故选项 A 错误；

由已知 $OC\perp DB$，所以 $OC\perp$ 平面 DBD_1，所以三棱锥 D_1-BDE 的体积 $V_{D_1-BDE}=V_{E-BDD_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle BDD_1}OC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选项 B 正确；

由已知在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $EC\perp$ 平面 $ABCD$，又 $OC\perp BD$，所以



$OE\perp BD$，所以$\angle EOC$为二面角$E-BD-C$的平面角，$\tan\angle EOC=\frac{EC}{OC}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 C 正确；

由已知$CB=CD=BD=CE=2$，$EC\perp$平面BCD，设三棱锥$E-BCD$的外接球球心为O_1，外接球半径为R，正三角形BCD的外心为点O_2，则$O_1O_2\perp$平面BCD，因为$O_1C=O_1E$，所以$O_1O_2=\frac{1}{2}CE=1$，所以$R^2=O_2C^2+O_1O_2^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+1^2=\frac{7}{3}$，所以三棱锥$E-BCD$的外接球表面积$S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

11.【答案】ABD

【解析】$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\ln x_n$，令$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

当$x\geqslant1$时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$递增；当$x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$递减，且$f(1)=1+\ln1=1$，$\therefore f(x)\geqslant1$，

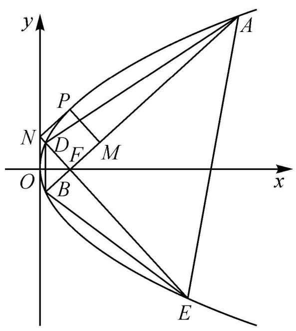
$\because x_1\in(0,1)$，$\therefore x_2=f(x_1)>1$，$x_3=f(x_2)>1$，$\cdots$，$x_{n+1}=f(x_n)>1$，$\therefore x_1$是最小的项，所以 A，B 正确；

令$g(x)=f(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x$，$x\geqslant1$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2}<0$，$\therefore g(x)$在区间$(1,+\infty)$内递减，$\therefore g(x)<g(1)=0$，所以$x_3-x_2<0$，即$x_3<x_2$；$x_4-x_3<0$即$x_4<x_3\cdots x_{n+1}-x_n<0$，即$x_{n+1}<x_n(n\geqslant2)$，所以 C 错误；

因为$x_{n+1}<x_n(n\geqslant2)$，所以$g(x_{n+1})>g(x_n)$，则$\frac{1}{x_{n+1}}+\ln x_{n+1}-x_{n+1}>\frac{1}{x_n}+\ln x_n-x_n$，所以$x_{n+2}-x_{n+1}>x_{n+1}-x_n$，即$2x_{n+1}<x_n+x_{n+2}$，所以 D 正确. 故选 ABD.

12.【答案】ACD

【解析】A 选项，由题意得$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{p}{2}$，设直线$l_1$：$x=\frac{p}{2}+my$，与$y^2=2px$联立得$y^2-2pmy-p^2=0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故$y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，则$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{p^2}{4}-p^2=-3$，解得$p=2$，A 正确；



B 选项，由 A 选项可知$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，因为$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，所以$y_1=-3y_2$，代入$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$得$y_2=-2m$，$-3y_2^2=-4$，即$m^2=\frac{1}{3}$，因为点$A$在第一象限，所以$m>0$，解得$m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线$l_1$的斜率为$\frac{1}{m}=\sqrt{3}$，设直线$l_1$的倾斜角为$\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则$\tan\theta=\sqrt{3}$，解得$\theta=\frac{\pi}{3}$，B 错误；

C 选项：抛物线$y^2=4x$的焦点F的坐标为$(1,0)$，$P(1,2)$.

因为$|PM|^2+|PN|^2=|PF|^2=4$，$|PM|^2+|PN|^2\geqslant2|PM|\cdot|PN|$，

所以$|PM|\cdot|PN|\leqslant2$，由$|PM|^2+|PN|^2=(|PM|+|PN|)^2-2|PM|\cdot|PN|$，

得$(|PM|+|PN|)^2\leqslant8$，即$|PM|+|PN|\leqslant2\sqrt{2}$，当且仅当$|PM|=|PN|=\sqrt{2}$时，等号成立，

所以四边形$PMFN$周长的最大值为$4\sqrt{2}$，故 C 正确；

D 选项：由 A 选项，得$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，则$|AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(1+m^2)$，同理得$|DE|=4\left(1+\frac{1}{m^2}\right)$，

$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}=\frac{1}{4(m^2+1)}+\frac{m^2}{4(m^2+1)}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{|AB|}+\frac{1}{|DE|}\geqslant2\sqrt{\frac{1}{|AB|}\cdot\frac{1}{|DE|}}$，所以$|AB|\cdot|DE|\geqslant64$，

当且仅当$|AB|=|DE|=8$时，等号成立，

此时$S_{四边形ADBE}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|FE|+\frac{1}{2}|AB|\cdot|FD|=\frac{1}{2}|AB|\cdot|DE|\geqslant 32$，故D正确.故选ACD.

13.【答案】1

【解析】由题设，$f(x)$是周期为2的偶函数，所以$f(13)+f(-14)=f(13)+f(0)=f(1)+f(0)=1$.

14.【答案】$\frac{13}{125}$

【解析】因考生成绩服从正态分布$N(75,\sigma^2)$，所以$P(X>90)=\frac{1-P(60\leqslant X\leqslant 90)}{2}=\frac{1}{5}$，故任意选取3名考生，至少有2名考生的成绩高于90的概率为$P=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{13}{125}$.

15.【答案】$\frac{3}{2}$或-1

【解析】因为$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{EM}$，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$，

又$|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC=2$，所以$\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$=\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}+\lambda^2=\frac{7}{4}$，即$2\lambda^2-\lambda-3=0$，所以$\lambda=\frac{3}{2}$或$-1$.

16.【答案】$(1,+\infty)$；$2\ln 3$

【解析】由已知x_1,x_2是$f'(x)=x-\ln x-a$的两个零点，令$h(x)=x-\ln x(x>0)$，则$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$，当$x\in(0,1)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单减，当$x\in(1,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单增，所以函数$f'(x)$在$(0,1)$上递减，在$(1,+\infty)$上递增，当$x\to 0$时，$f'(x)\to+\infty$，当$x\to+\infty$时，$f'(x)\to+\infty$，所以只需$f'(x)_{\min}=f'(1)=1-a<0$即可，所以$a>1$，即实数$a$的取值范围是$(1,+\infty)$；

由已知$a=x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，则$x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$，令$\frac{x_2}{x_1}=t\in(1,3]$，得$\begin{cases}x_1=\frac{\ln t}{t-1},\\x_2=\frac{t\ln t}{t-1},\end{cases}$

$\ln x_1+\ln x_2+2a=x_1+x_2=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，令$m(t)=\frac{(t+1)\ln t}{t-1}$，$t\in(1,3]$，则$m'(t)=\frac{-2\ln t+t-\frac{1}{t}}{(t-1)^2}$，

令$\varphi(t)=-2\ln t+t-\frac{1}{t}$，则$\varphi'(t)=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0(t\in(1,3])$，所以函数$\varphi(t)$在$t\in(1,3]$上递增，又因为$\varphi(1)=0$，所以当$t\in(1,3]$时，$\varphi(t)>0$，即$m'(t)>0$，所以函数$m(t)$在$t\in(1,3]$上递增，

所以$m(t)\leqslant m(3)=2\ln 3$，所以$\ln x_1+\ln x_2+2a$的最大值为$2\ln 3$.

17.【解析】(1)由$a\sin B=\sqrt{3}b(1-\cos A)$及正弦定理得$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B(1-\cos A)$，……………… 1分

因为$\sin B\neq 0$，所以$\sin A=\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos A$，即$\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… 3分

由$0<A<\pi$，$\frac{\pi}{3}<A+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，得$A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，所以$A=\frac{\pi}{3}$； ……………………………………… 5分

(2)由题意得$BD=\frac{1}{3}a$，$DC=\frac{2}{3}a$，$AD=1$，

在$\triangle ADB$与$\triangle ACD$中，分别由余弦定理得$\cos\angle ADB=\frac{DA^2+DB^2-AB^2}{2DA\cdot DB}=\frac{1+\frac{1}{9}a^2-c^2}{\frac{2}{3}a}$，$\cos\angle ADC=$

$\frac{DA^2+DC^2-AC^2}{2DA\cdot DC}=\frac{1+\frac{4}{9}a^2-b^2}{\frac{4}{3}a}$, …………………………………………………………………… 7 分

又 $\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$,化简得 $b^2+2c^2-3=\frac{2}{3}a^2=\frac{2}{3}(b^2+c^2-bc)$, ………………………… 8 分

整理得 $9=b^2+4c^2+2bc\geqslant 4bc+2bc=6bc$,即 $bc\leqslant\frac{3}{2}$,当且仅当 $b=2c$ 时等号成立.

所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ……………………………………………… 10 分

另解:因为$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{DB}$,所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,所以 $9\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AC}^2+4\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AB}^2$, …………… 7 分

又 $AD=1,A=\frac{\pi}{3}$,所以 $9=b^2+4c^2+4bc\cos\frac{\pi}{3}=b^2+4c^2+2bc\geqslant 4bc+2bc=6bc$, ……………………… 9 分

所以 $bc\leqslant\frac{3}{2}$,当且仅当 $b=2c$ 时等号成立.

所以$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $S_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. ……………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)因为 $BC=2CD=2PC$,又 $PB=\sqrt{5}CD$,所以 $PB^2=5CD^2=BC^2+CP^2$,所以 $PC\perp BC$, …… 2 分

由 $AC\perp CD$,可知 $AC\perp PC$,因为 $AC,BC\subset$平面 ABC,$AC\cap BC=C$,所以 $PC\perp$平面 ABC, …………… 4 分

因为 $AB\subset$平面 ABC,所以 $PC\perp AB$,又 $AB\perp BC$,$PC\cap BC=C$,$PC,BC\subset$平面 PBC,

所以 $AB\perp$平面 PBC; ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知,取 AC 的中点 O,连接 OM,OB,$PC\perp$平面 ABC,OM 为$\triangle PAC$ 的中位线,

所以 $OM\perp AC$,$OM\perp OB$,即 OM,OB,AC 两两垂直,如图以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$,

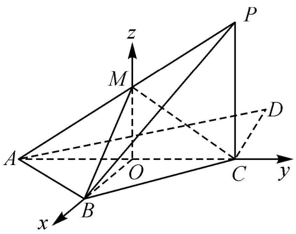
设 $CD=2$,则 $P(0,2\sqrt{2},2)$,$B(2\sqrt{2},0,0)$,$C(0,2\sqrt{2},0)$,$M(0,0,1)$, ……………………………… 7 分

所以$\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{2},-2\sqrt{2},-2)$,$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{BM}=(-2\sqrt{2},0,1)$,

设平面 MBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y=0,\\ -2\sqrt{2}x+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,2\sqrt{2})$, ……

……………………………………………………………………… 10 分



所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{2}{5}$,

所以直线 PB 与平面 MBC 所成角的正弦值为$\frac{2}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q,由已知得 $q>0$,

因为 $a_2a_3a_4=64$,所以 $a_3^3=64$,得 $a_3=4$,又 $a_1=1$,所以 $q=2$,

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$, …………………………………………………………………………… 2 分

对于数列$\{b_n\}$,因为 $b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1$ ①,

当 $n=1$ 时,$b_1=b_2-1$,则 $b_2=2$,

当 $n\geqslant 2$ 时,$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n-1}b_{n-1}=b_n-1$ ②,

由①-②得$\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-b_n$,即$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$, ………………………………………………………… 4 分

又$\frac{b_2}{b_1}=2$,也适合上式,故$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,

当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{1}\cdot1=n$,又 $b_1=1$,

所以 $b_n=n$; …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可得:$a_n=2^{n-1}$,$b_n=n$,则 $c_n=a_n+(-1)^n(2b_n+1)=2^{n-1}+(-1)^n(2n+1)$,

则数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和 $T_{2n}=2^0+(-1)\cdot(2+1)+2^1+(-1)^2\cdot(2\times2+1)+\cdots+2^{2n-1}+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot2n+1)$, …………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $T_{2n}=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2n-1})+[(-1)\cdot(2+1)+(-1)^2\cdot(2\times2+1)+\cdots+(-1)^{2n}\cdot(2\cdot2n+1)]$

$=\frac{1-2^{2n}}{1-2}+[-(2+1)+(2\times2+1)]+\cdots+[-(2\cdot(2n-1)+1)+(2\cdot2n+1)]$

$=2^{2n}-1+2n=2^{2n}+2n-1$. …………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)由题设随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,3,且 $X\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$, ……………………………… 1 分

所以 $P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$,$P(X=1)=C_3^1\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$,

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$,$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ ……………………………………… 4 分

随机变量 X 的分布列如下表:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$; …………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)得 $P=P(x_1=2,x_2=3)+P(x_1=3,x_2=2)+P(x_1=3,x_2=3)$

$=C_3^2\times p_1^2\times(1-p_1)\times(p_2)^3+(p_1)^3\times C_3^2\times p_2^2\times(1-p_2)+p_1^3\times p_2^3$,

整理得 $P=p_1^2p_2^2[3(p_1+p_2)-5p_1p_2]=p_1^2p_2^2(4-5p_1p_2)$, ………………………………………… 7 分

因为 $0\leqslant p_1\leqslant1$,$0\leqslant p_2\leqslant1$ 且 $p_1+p_2=\frac{4}{3}$,所以$\frac{1}{3}\leqslant p_1\leqslant1$,$\frac{1}{3}\leqslant p_2\leqslant1$,

所以$\frac{1}{9}\leqslant p_1p_2\leqslant\left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2$,当且仅当 $p_1=p_2=\frac{2}{3}$时等号成立,即$\frac{1}{9}\leqslant p_1p_2\leqslant\frac{4}{9}$, ………………… 8 分

令 $p_1p_2=t$,则 $t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$,所以 $P(t)=-5t^3+4t^2$,$t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$,则 $P'(t)=-15t^2+8t$,

当 $t\in\left[\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right]$时,$P'(t)>0$,则当 $t=\frac{4}{9}$时,$P(t)_{\max}=\frac{256}{729}$, ……………………………………………… 10 分

张华与刘中两同学在 n 轮比赛中获得的积分数 X 满足 $X\sim B(n,P)$, …………………………………… 11 分

所以由 $nP\geqslant5$,即 $n\times\frac{256}{729}\geqslant5$,解得 $n\geqslant5\times\frac{729}{256}\approx14.2$,因为 n 为正整数,所以 n 至少为 15,

所以若张华与刘中同学这一组想至少获得 5 个积分,那么理论上至少要进行 15 轮竞赛. …………… 12 分

21.【解析】(1)设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)(c>0)$.由对称性,不妨设 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a,y_0>0)$,

则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,所以 $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$,$-a<x_0<a$.

因为$\overrightarrow{PF_1}=(-c-x_0,-y_0)$,$\overrightarrow{PF_2}=(c-x_0,-y_0)$,

所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x_0^2-c^2+y_0^2=x_0^2-c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2=\frac{c^2}{a^2}x_0^2-c^2+b^2$, ……………………………… 2 分

所以当 $x_0=0$ 时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 取得最小值 b^2-c^2，所以 $b^2-c^2=2$.

由 $\begin{cases}b^2-c^2=2,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； …………………………………………………… 5 分

(2)由题设直线 l 斜率存在，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l：$y=k(x-1)$，

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-1),\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2},\end{cases}$ …………………………… 6 分

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{4k^2+3}\right)^2-4\times\dfrac{4k^2-12}{4k^2+3}}=\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$， …………………………………………………… 8 分

因为 $l\perp l_1$，所以 $k_{MN}=-\dfrac{1}{k}$，则 $|MN|=\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}$， …………………………………………………… 9 分

所以四边形 $AMBN$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\times|MN|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12(k^2+1)}{4k^2+3}\times\dfrac{12(k^2+1)}{3k^2+4}=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}$，

…………………………………………………………………………………………………… 10 分

$S=\dfrac{72(k^2+1)^2}{(4k^2+3)(3k^2+4)}\geqslant\dfrac{72(k^2+1)^2}{\left(\dfrac{4k^2+3+3k^2+4}{2}\right)^2}=\dfrac{288}{49}$，

当且仅当 $4k^2+3=3k^2+4$ 时取等号，即 $k=\pm1$ 时，$S_{\min}=\dfrac{288}{49}$，

当直线 l 的斜率不存在时，$|AB|=3$，$|MN|=4$，四边形 $AMBN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times3\times4=6$，

又由 $6>\dfrac{288}{49}$，所以四边形 $AMBN$ 面积的最小值为 $\dfrac{288}{49}$. …………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)由已知 $g(x)=\ln(x+1)-a(x+1)$，令 $t=x+1$，又 $x\in[0,e^2-1]$，得 $t\in[1,e^2]$.

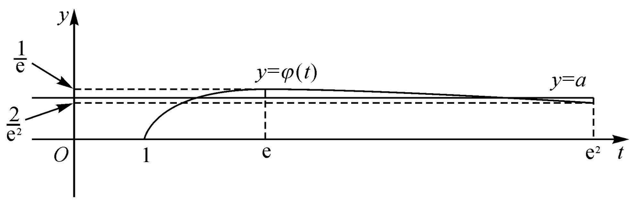
由题设可得 $a=\dfrac{\ln t}{t}$，令 $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，其中 $t\in[1,e^2]$，

则直线 $y=a$ 与函数 $y=\varphi(t)$ 的图象在 $[1,e^2]$ 上有两个交点，…………………………………………………… 2 分

因为 $\varphi'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$，当 $1<t<e$ 时，$\varphi'(t)>0$，此时函数 $\varphi(t)$ 单调递增，

当 $e<t<e^2$ 时，$\varphi'(t)<0$，此时函数 $\varphi(t)$ 单调递减. …………………………………………………… 3 分

所以函数 $\varphi(t)$ 的极大值为 $\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，且 $\varphi(1)=0$，$\varphi(e^2)=\dfrac{2}{e^2}$，如下图所示：



由图可知，当 $\dfrac{2}{e^2}\leqslant a<\dfrac{1}{e}$ 时，直线 $y=a$ 与函数 $y=\varphi(t)$ 在 $[1,e^2]$ 上的图象有两个交点，

所以函数 $g(x)=f(x)-a$ 在 $[0,e^2-1]$ 上有且仅有 2 个零点，

故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{2}{e^2},\frac{1}{e}\right)$； …………………………………………………………………… 5分

(2)当 $a>0$ 时，由已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

又 $f(x)\leqslant a^2e^x-a(x+1)$ 恒成立，即 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立，

当 $x=0$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 恒成立，即 $a^2-a\geqslant 0$，又 $a>0$，则 $a\geqslant 1$， …………………………………… 7分

下面证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$ 在 $x>-1$ 时恒成立，

由(1)得当 $x>-1$ 时，$\ln(x+1)\leqslant x$，

要证明 $\ln(x+1)\leqslant a^2e^x-a$，只需证明对任意的 $x\in(-1,+\infty)$，$a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立， ………………… 8分

令 $\varphi(x)=a^2e^x-x-a$，则 $\varphi'(x)=a^2e^x-1$，

由 $\varphi'(x)=a^2e^x-1=0$，得 $x=\ln\frac{1}{a^2}=-2\ln a\leqslant 0$，

①当 $-2\ln a\leqslant -1$，即 $a\geqslant\sqrt{e}$ 时，$\varphi'(x)\geqslant 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，则 $\varphi(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)>\varphi(-1)=\frac{a^2}{e}+1-a=\frac{1}{e}\left(a-\frac{e}{2}\right)^2+1-\frac{e}{4}>1-\frac{e}{4}>0$； ………………………………… 10分

②当 $-2\ln a>-1$，即 $1\leqslant a<\sqrt{e}$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(-1,-2\ln a)$ 上单调递减，在 $(-2\ln a,+\infty)$ 上单调递增，

于是 $\varphi(x)\geqslant\varphi(-2\ln a)=\frac{a^2}{a^2}+2\ln a-a=2\ln a-a+1$， ……………………………………………………… 11分

令 $h(a)=2\ln a-a+1$，则 $h'(a)=\frac{2}{a}-1>\frac{2}{\sqrt{e}}-1>0$，则 $h(a)$ 在 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递增，

于是 $h(a)_{\min}=h(1)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立，

所以 $a\geqslant 1$ 时，不等式 $a^2e^x-a\geqslant x$ 恒成立，因此 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$． ………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。