



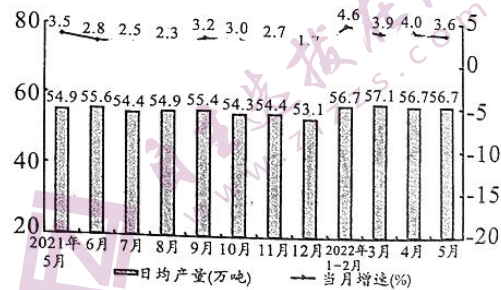
1号卷·A10联盟2023 数学i

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中
宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中
本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分

第I卷(选择题 共60分)

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

- 若 $z = -1 - i^{2023}$, 则 $|z| =$ ()
A. $2\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ D. 1
- 设集合 $P = \{x | \log_2 x < 2\}$, $Q = \{y | y = \sqrt{25 - x^2}, x \in P\}$, 则 $P \cap Q =$ ()
A. $\{x | 3 < x < 4\}$ B. $\{x | 3 < x \leq 4\}$
C. $\{x | 0 < x < 4\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 5\}$
- 下图是国家统计局2022年6月发布的规模以上工业日均原油产量(单位:万吨)的月度走势情况,现有如下说法:
①2021年5月至2022年5月,规模以上工业原油的日均产量的极差为4;
②从2021年5月至2021年12月中随机抽取1个月份,月增速超过2.9%的概率为 $\frac{1}{2}$;
③2022年4月份,规模以上工业原油总产量约为1701万吨;
则说法错误的个数为 ()
A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
- 若 $\tan \alpha = 3$, 则 $\sin(2\alpha - 3\pi) =$ ()
A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $-\frac{4}{5}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_n = 3S_n - 1$, 则 $S_4 =$ ()
A. $\frac{3}{8}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{7}{24}$ D. $\frac{5}{16}$
- 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M 在线段 CC_1 上,点 N 为线段 AA_1 的中点,记平面 $BDM \cap$ 平面 $B_1D_1M = l$, 则下列说法一定正确的是 ()
A. $l \perp$ 平面 BDN B. $l \perp$ 平面 B_1D_1N
C. $l \perp$ 平面 CDD_1C_1 D. $l \perp$ 平面 ACC_1A_1



试题

舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中
宿城一中 合肥六中 太和中学 合肥七中

满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

7. 已知函数 $f(x) = (a-1)x^3 + x^2 + \ln(x^2 + 2)$ 为 \mathbf{R} 上的偶函数，则不等式 $f(2x-1) \leq f(a)$ 的解集为 ()

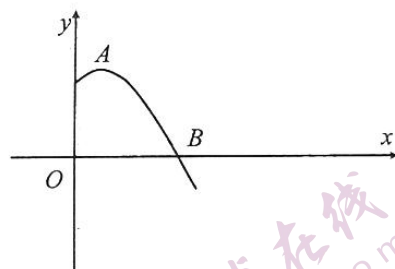
- A. $[-2, 2]$ B. $[-1, 2]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, 1]$

8. 已知 $(mx+1)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*, m \in \mathbf{R}$) 的展开式只有第5项的二项式系数最大，设 $(mx+1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ，若 $a_1 = 8$ ，则 $a_2 + a_3 + \dots + a_n =$ ()

- A. 63 B. 64 C. 247 D. 255

9. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，其中 $A(\frac{\pi}{12}, 2)$, $B(\frac{\pi}{3}, 0)$ ，则下列说法错误的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后关于原点对称
 C. $f(x)$ 在 $[-\pi, -\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减
 D. 直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴



10. 在四面体 $ABCD$ 中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle BCD$ 都是边长为 2 的等边三角形，且点 A 在底面 BCD 的射影落在 $\triangle BCD$ 的中心上，则四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 ()

- A. 4π B. 6π C. 8π D. $4\sqrt{2}\pi$

11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，点 A 在 C 的过第二、四象限的渐近线 l 上，且 $AF_2 \perp l$ ，若 $|BF_2| - |BF_1| = 2a$ ，且 $\overrightarrow{F_2B} + 2\overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$ ，则 C 的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

12. 已知 x_0 是函数 $f(x) = 2^{4x} - 2^{2(x+1)} - 5$ 的零点，设 $a = 4 - 3^{x_0}$ ， $b = 6 - 5^{x_0}$ ，则 ()

- A. $a > 0 > b$ B. $b > a > 0$ C. $a > b > 0$ D. $b > 0 > a$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。将答案填写在题中的横线上。)

13. 已知某次考试的数学成绩 X 服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$)，且 $P(80 < X < 120) = \frac{2}{3}$ ，现从

这次考试随机抽取3位同学的数学成绩，则这3位同学的数学成绩都在(100,120)内的概率为_____。

14. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2|b|$, $||a + 2b| = |a - b|$, 则 a 与 b 的夹角的余弦值为_____。
15. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 12x$ 的焦点为 F , 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过 F 的直线 l 与 C_1 交于 A, B 两点, 与 C_2 交于 M, N 两点, 且 A, M 在同一象限, 则 $|AM| + 4|BN|$ 的最小值为_____。
16. 函数 $f(x) = x(e^x - 1) - \ln x + 1$ 的值域是_____。

三、解答题 (本大题共6小题, 共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{n}{2a_n - 5}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{n}{3}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $c_n = \frac{1}{a_n}$, 记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n < \frac{4}{33}$.

18. (本小题满分12分)

已知某校高三进行第一次摸底考试, 从全校选考地理的高三学生中, 随机抽取100名学生的地理成绩制成如图所示的频率分布直方图, 满分为100分, 其中80分及以上为优秀, 其他为一般.

已知成绩优秀的学生中男生有10名, 成绩一般的学生中男生有40名, 得到如下的 2×2 列联表.

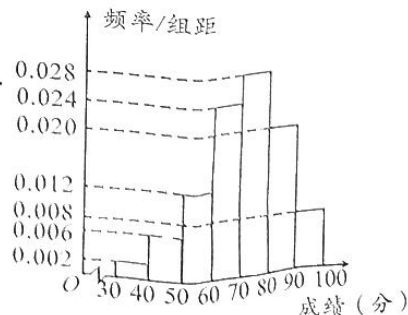
性别	考试成绩		合计
	优秀	一般	
男生	10	40	
女生			
合计			

(1) 根据上述数据, 完成上面 2×2 列联表, 并依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 分析“考试成绩优秀”与“性别”是否有关?

(2) 从考试成绩在 $[80, 90), [90, 100]$ 中, 利用分层随机抽样抽取7名学生进行学习经验介绍, 从抽取的学生中, 再确定3名学生做学习经验的介绍, 则抽取的3名学生中, 考试成绩在 $[90, 100]$ 的学生数为 ξ , 求 ξ 的分布列与数学期望.

参考公式: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a+b+c+d$.

α	0.10	0.05	0.01	0.001
χ_{α}^2	2.706	3.841	6.635	10.828



19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 点 M, N 分别在线段 BC, BA 上, 且 $BM = CM$, $\angle ACN = \angle BCN$,

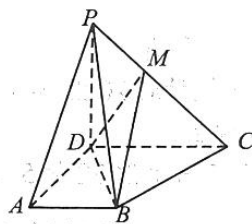
$$AB = \sqrt{13}, AM = \frac{3}{2}, AC = 2.$$

- (1) 求 BM 的长;
- (2) 求 $\triangle BCN$ 的面积.

20. (本小题满分 12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是直角梯形, 且 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \parallel DC$, $DC = 2AB = 4$, $AB \perp AD$, $PD = 2$, 点 M 在棱 PC 上.

- (1) 当 $MC = 2MP$ 时, 求证: $PA \parallel$ 平面 MBD ;
- (2) 若直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° , 二面角 $P-BD-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\frac{PM}{PC}$ 的值.



21. (本小题满分 12 分)

已知 O 为坐标原点, 椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 过点 M, N, P , 记线段 MN 的中点为 Q .

- (1) 若直线 MN 的斜率为 3, 求直线 OQ 的斜率;
- (2) 若四边形 $OMPN$ 为平行四边形, 求 $|MN|$ 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - ax, a \in \mathbf{R}$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性;
- (2) 若 $x \in (-1, 0]$, $f(x) \leq 1 - \cos x$, 求 a 的取值范围.

1号卷·A10联盟2023届高三开学摸底考

数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	B	A	D	D	D	C	C	B	B	A

1. C 由题意得, $z = -1 - i^{2023} = -1 + i$, 则 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. 故选 C.
2. A $\because P = \{x | \log_2 x < 2\} = \{x | 0 < x < 4\}$, $Q = \{y | y = \sqrt{25 - x^2}, x \in P\} = \{y | 3 < y < 5\}$,
 $\therefore P \cap Q = \{x | 3 < x < 4\}$. 故选 A.
3. B 由图可知, 极差为 $57.1 - 53.1 = 4$, 故①正确; 2021年5月至2021年12月, 月增速超过2.9%的有5月、9月、10月, 故所求概率为 $\frac{3}{8}$, 故②错误; $56.7 \times 30 = 1701$, 故③正确. 故选 B.
4. A 由题意得, $\sin(2\alpha - 3\pi) = -\sin 2\alpha = -\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = -\frac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1} = -\frac{3}{5}$. 故选 A.
5. D 当 $n=1$ 时, $a_1 = 3a_1 - 1$, $\therefore a_1 = \frac{1}{2}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1} = 3S_{n-1} - 1$, 两式相减可得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}$,
 \therefore 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$, 公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列, $\therefore a_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\therefore S_4 = \frac{5}{16}$.
故选 D.
6. D 由题意得, $B_1D_1 \parallel BD$, 则 $B_1D_1 \parallel$ 平面 BDM , 又平面 $BDM \cap$ 平面 $B_1D_1M = l$, $\therefore B_1D_1 \parallel l$, $\therefore l \perp$ 平面 ACC_1A_1 . 故选 D.
7. D 由函数 $f(x)$ 为偶函数, 得 $a=1$, 则函数 $f(x) = x^2 + \ln(x^2 + 2)$, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(2x-1) \leq f(1)$ 可以变为 $f(|2x-1|) \leq f(1)$, 则 $|2x-1| \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 1$. 故选 D.
8. C 由题意得, $n=8$, $a_1 = C_8^7 m = 8$, $\therefore m=1$, $\therefore (x+1)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$, 令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 2^8 = 256$, 令 $x=0$, 得 $a_0 = 1$, $\therefore a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 247$. 故选 C.
9. C 由题意得, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$, 则 $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$, 而 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2$, 即 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$, $\therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故 A 正确; 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 得到 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin 2x$, 该函数图象关于原点对称, 故 B 正确;
 $\therefore x \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$, $\therefore 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{3}, -\pi\right]$, 则 $f(x)$ 在 $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right]$ 上先增后减, 故 C 错误;
 $\therefore f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$, \therefore 直线 $x = \frac{7\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 D 正确. 故选 C.
10. B 由点 A 的投影落在底面 BCD 的中心上, 得四面体 $ABCD$ 为正四面体, 且棱长为 2. 设点 A 在底面的投影为 O' , 四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为 R , 球心为 O , 可得 $BO' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

又 $AB=2$, $\therefore AO' = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle BOO'$ 中, $R^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - R\right)^2$,

解得 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$, \therefore 四面体的外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{3}{2} = 6\pi$. 故选 B.

11. B $\because |BF_2| - |BF_1| = 2a$, \therefore 点 B 在双曲线 C 的左支上, $\therefore \overrightarrow{F_2B} + 2\overrightarrow{BA} = \mathbf{0}$, \therefore 点 A 为线段 F_2B 的中点, $\therefore |BF_2| = 2|AF_2| = 2b$, 又 $AF_2 \perp l$, $\therefore BF_1 \perp BF_2$, $\therefore |BF_1| = 2a$, $\therefore 2b - 2a = 2a$, 即 $b = 2a$, $\therefore e = \sqrt{5}$. 故选 B.

12. A 由 $f(x) = 2^{4x} - 2^{2(x+1)} - 5 = 0$ 可得 $(4^x + 1)(4^x - 5) = 0$, 故 $x_0 = \log_4 5 > 1$,
 $\therefore \lg 3 \times \lg 5 < \left(\frac{\lg 3 + \lg 5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 15}{2}\right)^2 < \left(\frac{\lg 16}{2}\right)^2 = (\lg 4)^2$, $\therefore \frac{\lg 4}{\lg 3} > \frac{\lg 5}{\lg 4}$, 即 $x_0 < \log_3 4$,
 $\therefore a = 4 - 3^{x_0} > 4 - 3^{\log_3 4} = 0$. 又 $\lg 4 \times \lg 6 < \left(\frac{\lg 4 + \lg 6}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 24}{2}\right)^2 < \left(\frac{\lg 25}{2}\right)^2 = (\lg 5)^2$,
 $\therefore \frac{\lg 5}{\lg 4} > \frac{\lg 6}{\lg 5}$, 即 $x_0 > \log_5 6$, $\therefore b = 6 - 5^{x_0} < 6 - 5^{\log_5 6} = 0$. 综上, $a > 0 > b$. 故选 A.

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 将答案填写在题中的横线上.)

13. $\frac{1}{27}$

由题意得, 该正态曲线的对称轴为 $X = \mu = 100$, $\therefore P(80 < X < 120) = \frac{2}{3}$,

$\therefore P(100 < X < 120) = \frac{1}{3}$, \therefore 3 位同学的数学成绩都在 $(100, 120)$ 的概率为 $P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

14. $-\frac{1}{4}$

$\because |a+2b| = |a-b|$, \therefore 两边平方可得 $a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$, 又 $|a| = 2|b|$,

$\therefore 12b^2 \cos \langle a, b \rangle = -3b^2$, $\therefore \cos \langle a, b \rangle = -\frac{1}{4}$.

15. 12

显然直线 l 不与 y 轴垂直, 设直线 $l: x = my + 3$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 12x \\ x = my + 3 \end{cases}$, 得 $y^2 - 12my - 36 = 0$, $\Delta > 0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = 12m, y_1 y_2 = -36$, $x_1 x_2 = \frac{y_1^2 y_2^2}{144} = 9$, $\therefore |AM| + 4|BN| =$

$(|AF| - 3) + 4(|BF| - 3) = x_1 + 4x_2 \geq 2\sqrt{4x_1 x_2} = 12$, 当且仅当 $x_1 = 4x_2 = 6$ 时, 等号成立.

16. $[2, +\infty)$

$f(x) = x(e^x - 1) - \ln x + 1 = x \cdot e^x - (\ln x + x) + 1$, 令 $t = xe^x > 0$, 记 $f(t) = t - \ln t + 1$, 则

$f'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$, 易知当 $t \in (0, 1)$ 时, $f(t)$ 为减函数; 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $f(t)$ 为增函数,

$\therefore f(t)_{\min} = f(1) = 2$, $\therefore f(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 10 分）

(1) 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 Q_n ，则 $Q_n = \frac{n}{3}$.

当 $n \geq 2$ 时， $b_n = Q_n - Q_{n-1} = \frac{n}{3} - \frac{n-1}{3} = \frac{1}{3}$ ，.....3 分

当 $n=1$ 时， $b_1 = \frac{1}{3}$ ，则 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $b_n = \frac{n}{2a_n - 5} = \frac{1}{3}$ ，.....4 分

$\therefore a_n = \frac{3n+5}{2}$5 分

(2) 由题意得， $c_n = \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{4}{(3n+8)(3n+11)} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3n+8} - \frac{1}{3n+11} \right)$ ，.....7 分

$\therefore S_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{3n+8} - \frac{1}{3n+11} \right)$
 $= \frac{4}{3} \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{3n+11} \right) < \frac{4}{33}$10 分

18.（本小题满分 12 分）

(1) 根据频率分布直方图可得考试成绩优秀的总人数为 $100 \times (0.020 + 0.008) \times 10 = 28$ ，则女生的人数为 18，考试成绩一般的人数为 72，则女生的人数为 $72 - 40 = 32$ ，则 2×2 列联表为

性别	考试成绩		合计
	优秀	一般	
男生	10	40	50
女生	18	32	50
合计	28	72	100

假设 H_0 : 考试成绩优秀与性别无关.

$$\chi^2 = \frac{100 \times (10 \times 32 - 40 \times 18)^2}{28 \times 72 \times 50 \times 50} \approx 3.175 < 3.841, \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

根据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，即认为“考试成绩优秀”与“性别”无关.6 分

(2) 易得考试成绩在 $[80, 90)$, $[90, 100]$ 的学生人数分别为 20，8，利用分层随机抽样抽取的学生人数分别为 5，2，则 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2，

$$P(\xi = 0) = \frac{C_5^3}{C_7^3} = \frac{2}{7}, P(\xi = 1) = \frac{C_5^2 C_2^1}{C_7^3} = \frac{4}{7}, P(\xi = 2) = \frac{C_5^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{1}{7}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

则 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

.....10 分

$$\therefore E(\xi) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得, $\cos \angle AMB = -\cos \angle AMC$,1 分

在 $\triangle AMB$, $\triangle AMC$ 中, 由余弦定理得 $\frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} + \frac{AM^2 + MC^2 - AC^2}{2AM \cdot MC} = 0$,3 分

$\therefore AB = \sqrt{13}, AM = \frac{3}{2}, AC = 2, BM = CM$,

$\therefore \frac{9}{4} + BM^2 - 13 + \frac{9}{4} + BM^2 - 4 = 0$,5 分

即 $BM^2 = \frac{25}{4}$, 则 $BM = \frac{5}{2}$6 分

(2) 由 (1) 知, $\triangle AMC$ 为直角三角形,

$\therefore S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, $\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle AMC} = 3$8 分

$\therefore \angle ACN = \angle BCN$, $\therefore \frac{S_{\triangle ACN}}{S_{\triangle BCN}} = \frac{\frac{1}{2} \times AC \times CN \times \sin \angle ACN}{\frac{1}{2} \times BC \times CN \times \sin \angle BCN} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{5}$,10 分

$\therefore S_{\triangle BCN} = \frac{5}{7} S_{\triangle ABC} = \frac{15}{7}$, 即 $\triangle BCN$ 的面积为 $\frac{15}{7}$12 分

20. (本小题满分 12 分)

(1) 连接 AC 交 BD 于点 O , 连接 OM ,

由 $AB \parallel DC$ 知, $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, $\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2}$,2 分

$\therefore MC = 2MP$, $\therefore \frac{OA}{OC} = \frac{MP}{MC} = \frac{1}{2}$, $\therefore PA \parallel MO$,3 分

又 $MO \subset$ 平面 MBD , $PA \not\subset$ 平面 MBD , $\therefore PA \parallel$ 平面 MBD5 分

(2) $\because PD \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore \angle PAD$ 为 PA 与底面 $ABCD$ 所成的角,

$\therefore \angle PAD = 45^\circ$, $\therefore AD = 2$.

以 D 为坐标原点, 分别以 DA, DC, DP 为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 4, 0), P(0, 0, 2)$,

$\therefore \overrightarrow{DB} = (2, 2, 0), \overrightarrow{DP} = (0, 0, 2)$6 分

设平面 PBD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{DP} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases}$,

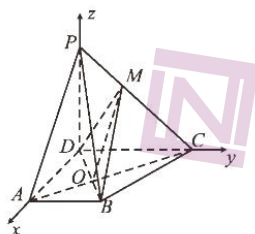
即 $\begin{cases} 2z_1 = 0 \\ 2x_1 + 2y_1 = 0 \end{cases}$, 令 $x_1 = 1$, 则 $\mathbf{m} = (1, -1, 0)$,8 分

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = (0, 4\lambda, 2 - 2\lambda)$,

设平面 MBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{DM} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} 2x_2 + 2y_2 = 0 \\ 4\lambda y_2 + (2 - 2\lambda)z_2 = 0 \end{cases}$, 令 $x_2 = 1$, 则 $\mathbf{n} = \left(1, -1, \frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)$,10 分

$$\therefore \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{m}\| \|\mathbf{n}\|} = \frac{\left| 1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times \frac{2\lambda}{1-\lambda} \right|}{\sqrt{1+(-1)^2} \cdot \sqrt{1+(-1)^2 + \left(\frac{2\lambda}{1-\lambda}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2}, \therefore \frac{PM}{PC} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



21. (本小题满分 12 分)

(1) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{12} = 1 \\ \frac{x_2^2}{16} + \frac{y_2^2}{12} = 1 \end{cases}$$

两式相减可得,
$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{16} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{12} = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

则
$$\frac{12}{16} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)} = 0, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

即
$$k_{MN} \cdot k_{OQ} = -\frac{3}{4}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

故直线 OQ 的斜率为 $-\frac{1}{4}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) ①若直线 MN 垂直于 x 轴, 易得 $P(4, 0), M(2, 3), N(2, -3)$ 或 $P(-4, 0), M(-2, 3), N(-2, -3)$, 此时 $|MN| = 6$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

②若直线 MN 不垂直于 x 轴, 设 $MN: y = kx + m (m \neq 0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$,

联立
$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 48 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 48}{3 + 4k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \vec{OP} = \vec{OM} + \vec{ON}, \therefore x_0 = x_1 + x_2, y_0 = y_1 + y_2,$$

$$\therefore x_0 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}, y_0 = y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{6m}{3 + 4k^2},$$

即
$$P\left(-\frac{8km}{3 + 4k^2}, \frac{6m}{3 + 4k^2}\right). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore P \text{ 在椭圆上, } \therefore \frac{\left(-\frac{8km}{3 + 4k^2}\right)^2}{16} + \frac{\left(\frac{6m}{3 + 4k^2}\right)^2}{12} = 1, \text{ 化简得 } m^2 = 3 + 4k^2.$$

此时 $\Delta = 64k^2m^2 - 16(3 + 4k^2)(m^2 - 12) = 144m^2 > 0,$

$$\begin{aligned} \therefore x_1 + x_2 &= -\frac{8km}{3+4k^2} = \frac{-8k}{m}, \quad x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 48}{3+4k^2} = \frac{4m^2 - 48}{m^2}, \\ \therefore |MN| &= \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{12\sqrt{1+k^2}}{|m|} = 12\sqrt{\frac{1+k^2}{3+4k^2}} = 12\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4(3+4k^2)}}. \dots\dots\dots 10 \text{分} \\ \therefore 3+4k^2 &\geq 3, \therefore 0 < \frac{1}{3+4k^2} \leq \frac{1}{3}, \therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4(3+4k^2)} \leq \frac{1}{3}, \therefore 6 < |MN| \leq 4\sqrt{3}. \dots\dots\dots 11 \text{分} \end{aligned}$$

综上, $|MN|$ 的取值范围为 $[6, 4\sqrt{3}]$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得, $x \in (-1, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x+1} - a = \frac{1-ax-a}{x+1}$, $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - 1$;

当 $a \geq 1$, $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

当 $0 < a < 1$ 时, 当 $x \in (0, \frac{1-a}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1-a}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1-a}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1-a}{a}, +\infty)$ 上单调递减. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由题意得, $\ln(x+1) - ax \leq 1 - \cos x$, 即 $\ln(x+1) + \cos x - ax \leq 1$.

令 $g(x) = \ln(x+1) + \cos x - ax$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \sin x - a$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

当 $-1 < x \leq 0$ 时, $g'(x)$ 单调递减, $\therefore g'(x) \geq g'(0) = 1 - a$. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

① 当 $a \leq 1$ 时, $1 - a \geq 0$, 则 $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $\therefore g(x)$ 为增函数, $\therefore g(x) \leq g(0) = 1$; $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

② 当 $a > 1$ 时, $1 - a < 0$, $-1 < \frac{1}{a} - 1 < 0$,

$\therefore g'(0) = 1 - a < 0$, $g'(\frac{1}{a} - 1) = -\sin(\frac{1}{a} - 1) > 0$,

\therefore 存在 $x_0 \in (-1, 0]$, 使 $g'(x_0) = 0$, 且 $x \in [x_0, 0]$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减,

$\therefore g(x_0) > g(0) = 1$, 与 $g(x) \leq 1$ 矛盾, 舍去.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线