**高2024届高考诊断考试（一）数学试题**

**（试卷满分：150分 120分钟完卷）**

**一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）**

1. 已知集合，，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】先解出集合*A*，找到*A*的补集，再求出和*B*的交集.

【详解】因为，所以，又，所以．

故选：B．

2. 已知复数，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的除法法则求复数，再由共轭复数定义求.

【详解】∵，

∴．

故选：D.

3. 已知，则（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

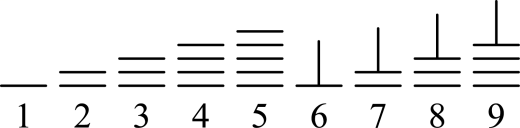
【解析】

【分析】利用诱导公式、余弦的倍角公式可得答案.

【详解】因为，所以.

故选：A.

4. 数学来源于生活，约3000年以前，我国人民就创造出了属于自己的计数方法．十进制的算筹计数法就是中国数学史上一个伟大的创造，算筹实际上是一根根同长短的小木棍．下图是利用算筹表示数1～9的一种方法．例如：3可表示为“”，26可表示为“”，现有5根算筹，据此表示方法，若算筹不能剩余，则用1～9这9个数字表示的所有两位数中，个位数与十位数之和为5的概率是（ ）



A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意把5根算筹所能表示的两位数列举出来后，求出数字和为5的两位数个数作答.

【详解】1根算筹只能表示1，2根算筹可表示2和6，3根算筹可表示3和7，4根算筹可表示4和8，5根算筹可表示5和9，

因此5根算筹表示的两位数有14，18，41，81，23，27，32，72，63，67，36，76，共12个，

其中个位数与十位数之和为5的有14，41，23，32，共4个，

所以所求概率为．

故选：A

5. 若数列的前项积，则的最大值与最小值的和为（ ）

A.  B.  C. 2 D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】由题可得，利用数列的增减性可得最值.

【详解】∵数列的前项积，

当时，，

当时，，，

时也适合上式，

∴，

∴当时，数列单调递减，且，

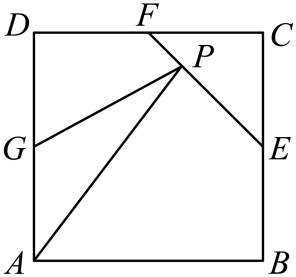
当时，数列单调递减，且，

故的最大值为，最小值为，

∴的最大值与最小值之和为2.

故选：C.

6. 如图所示，正方形的边长为2，点，，分别是边，，的中点，点是线段上的动点，则的最小值为（ ）



A.  B. 3 C.  D. 48

【答案】A

【解析】

【分析】建立平面直角坐标系，设，，（），即可得到、，根据数量积的坐标表示得到，再结合二次函数的性质计算可得.

【详解】如图建立平面直角坐标系，则、、、，

设，，（），则，

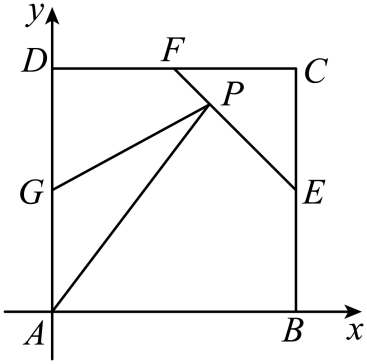
所以，

所以，即，所以，，

所以

，

又，所以当时取得最小值为.



故选：A

7. 椭圆的左右焦点为，，点*P*为椭圆上不在坐标轴上的一点，点*M*，*N*满足，，若四边形的周长等于，则椭圆*C*的离心率为（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】根据，，可得点为线段的中点，点为线段的中点，再根据四边形的周长结合椭圆的离心率公式即可得解.

【详解】因为，所以点为线段的中点，

因为，所以，

即，所以点为线段的中点，

又因点为线段的中点，

所以且，且，

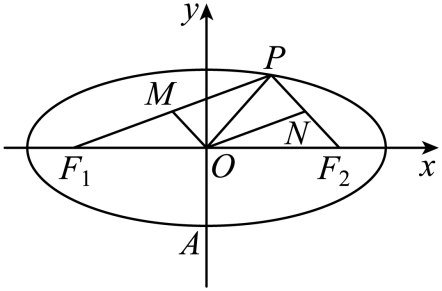
所以四边形的周长为，

又因点*P*为椭圆上不在坐标轴上的一点，所以，

所以，即，

故椭圆*C*的离心率为.

故选：C.



8. 已知偶函数满足，，且当时，.若关于的不等式在上有且只有个整数解，则实数的取值范围是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】分析可知，函数是周期为的周期函数，由题意可得关于的不等式在上有且只有个整数解，数形结合可得出实数的取值范围.

【详解】因为偶函数满足，则，即，

所以，函数是周期为的周期函数，

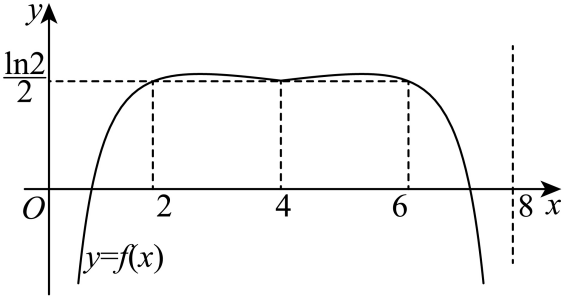
当时，，令，可得.

由可得，由可得.

所以，函数在上单调递增，在上单调递减，

因为关于的不等式在上有且只有个整数解，

则关于的不等式在上有且只有个整数解，如下图所示：



因为，且，

又因为，所以，要使得不等式在上有且只有个整数解，

则这五个整数解分别为、、、、，

所以，，即，

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题考查利用不等式的整数解的个数求参数的取值范围，解题的关键在于作出函数的图象，明确整数解是哪些整数，再结合图形求解.

**二、多选题（共4小题，每小题5分，共20分）**

9. 已知函数，则（ ）

A.  B. 的最小正周期为

C. 在上单调递减 D. 在上单调递增

【答案】ABC

【解析】

【分析】首先根据三角函数二倍角化简，然后利用整体代入法研究函数图像即可；

【详解】选项A正确；

所以函数的最小正周期为选项B正确；

根据余弦函数图像性质，（余弦函数对应的单调递减区间），函数单调递减，选项C正确；

根据余弦函数图像性质，（余弦函数对应单调递增区间），函数不单调，选项D错误；

故选：ABC.

10. 某市为响应教育部《切实保证中小学每天一小时校园体育活动的规定》号召，提出“保证中小学生每天一小时校园体育活动”的倡议.在某次调研中，甲、乙两个学校学生一周的运动时间统计如下表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 学校 | 人数 | 平均运动时间 | 方差 |
| 甲校 | 2000 | 10 | 3 |
| 乙校 | 3000 | 8 | 2 |

记这两个学校学生一周运动的总平均时间为，方差为，则（ ）

A  B. 

C.  D. 

【答案】BC

【解析】

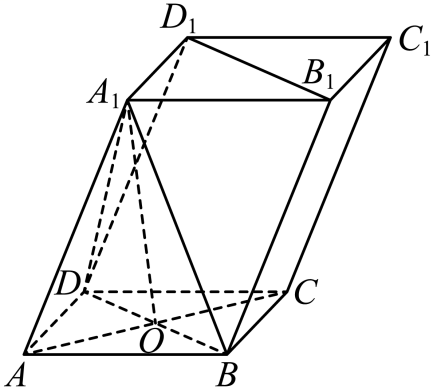
【分析】根据平均数和方差的计算公式求解.

【详解】依题意，总平均时间为，

方差为.

故选：BC

11. 如图，平行六面体中，，，与交于点*O*，则下列说法正确的有（ ）



A. 平面平面

B. 若，则平行六面体的体积

C. 

D. 若，则

【答案】ABD

【解析】

【分析】对于A，由题意可得四边形为菱形，则可得，再计算，可得，从而得平面，再利用面面垂直的判定定理可得结论；对于B， 连接，可得，从而可证得平面，进而可求出体积，对于C，利用空间向量的加法分析判断，对于C，设，则可得 ，然后利用向量的夹角公式计算判断.

【详解】对于A，因为在平行四边形中，，所以四边形为菱形，所以，

因为，，

所以，所以，

因为， 所以，

所以，所以，

因，平面，所以平面，

因为平面，所以平面平面，所以A正确，

对于B，连接，因为，，所以，

所以为直角三角形，即，因为∥，所以，

因为由选项A知平面，平面，所以，

因为，平面，所以平面，

所以平行六面体的体积，所以B正确，

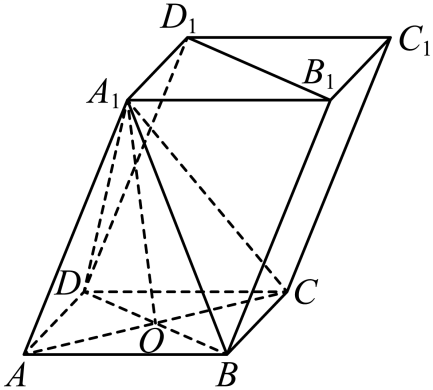
对于C，因为四边形为平行四边形，所以为的中点，

所以，所以，所以C错误，

对于D，设，因为在菱形中，，所以，

所以，所以D正确，

故选：ABD

 【点睛】关键点点睛：此题考查面面垂直的判断，考查平行六面体体积的求法，考查空间向量的运算，解题的关键是正确利用平行六面体的性质结合题意分析求解，考查空间想能力和计算能力，属于较难题.

12. 已知函数，下列选项正确的是（ ）

A 有最大值

B. 

C. 若时，恒成立，则

D. 设为两个不相等的正数，且，则

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于A：求导，利用导数判断原函数的单调性和最值；对于B：利用作差法比较大小；对于C：利用定点分析判断；对于D：利用极值点偏离分析证明.

【详解】对于选项A：由题意可得：函数的定义域为，且，

令，解得；令，解得；

则函数在上单调递增，在上单调递减，

所以有最大值，故A正确

对于选项B：因为，

则，

所以，故B错误；

对于选项C：构建，则，

因为，且当时，恒成立，

则，解得，

若，则当时恒成立，

则在上单调递减，则，符合题意

综上所述：符合题意，故C正确；

对于选项D：因为，

整理得，即，

由选项A可知：函数在上单调递增，在上单调递减，

当*x*趋近于0时，趋近于0，且令，解得，

不妨设，

构建，

因为在上恒成立，

则在上单调递增，可得，

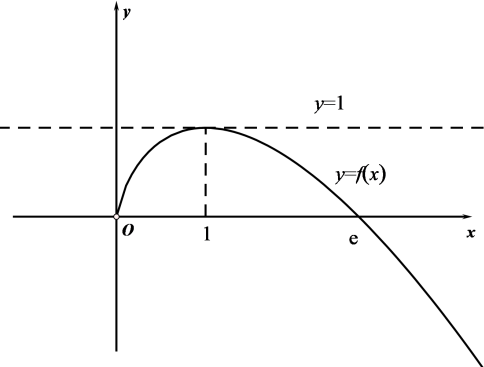
所以，即，

可得，

注意到在上单调递减，且，

所以，即，故D正确；

故选：ACD.



【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式的基本步骤

（1）作差或变形；

（2）构造新的函数；

（3）利用导数研究的单调性或最值；

（4）根据单调性及最值，得到所证不等式．

特别地：当作差或变形构造的新函数不能利用导数求解时，一般转化为分别求左、右两端两个函数的最值问题．

**三、填空题（共4小题，每小题5分，共20分）**

13. 展开式中的各二项式系数之和为256，则的系数是\_\_\_\_\_\_\_

【答案】112

【解析】

【分析】由二项式系数和等于求得的值，再利用展开式的通项公式计算即可.

【详解】依题意得：解得

则

由，解得

从而.

故答案为：

14. 现从甲、乙、丙3人中选派一人参加“垃圾分类”知识竞答，他们商议通过玩“石头、剪刀、布”游戏解决：如果其中两人手势相同，另一人不同，则选派手势不同的人参加；否则重新进行一局“石头、剪刀、布”游戏，直到确定人选为止.在每局游戏中，甲、乙、丙各自出3种手势是等可能的，且各局游戏是相互独立的，则直到第三局游戏才最终确定选派人员的概率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】

【分析】根据题意，先求出进行一局游戏，没有确定参加活动人选的概率，然后根据各局游戏是相互独立，即可得到结果.

【详解】设事件表示“进行一局游戏，成功确定参加活动人选”，

则，

则进行一局游戏，没有确定参加活动人选的概率为，

且各局游戏是相互独立的，

则直到第三局游戏才最终确定选派人员的概率为.

故答案为：

15. 已知等比数列满足：，.数列满足，其前项和为，若恒成立，则的最小值为\_\_\_\_\_\_.

【答案】##

【解析】

【分析】设等比数列的公比为，求出、的值，可得出数列的通项公式，可求出的通项公式，求出，利用对勾函数的单调性求出的最大值，即可得出实数的最小值.

【详解】设等比数列的公比为，则，解得，

所以，，解得，则，

所以，，

，所以，数列为等差数列，

所以，，

则，

因为函数在上单调递减，在上单调递增，

当时，；当时，.

又因为，故的最大值为.

因此，对任意的恒成立，所以，，故的最小值为.

故答案为：.

16. 已知抛物线上存在两点（异于坐标原点），使得，直线*AB*与*x*轴交于*M*点，将直线*AB*绕着*M*点逆时针旋转与该抛物线交于*C*，*D*两点，则四边形*ACBD*面积的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】设直线的方程为，联立方程组，由条件证明，由此可得，再求，求四边形*ACBD*面积的解析式，求其最小值即可.

【详解】由已知直线的斜率存在，且不为，

故可设直线的方程为，

联立，

消得，，

方程的判别式，

设，则，

所以

因为，

所以，所以，

所以，

又异于坐标原点，所以，所以，

所以，

所以直线的方程为，

且

所以直线与轴的交点为，

所以点的坐标为，

所以直线的方程为，

联立，

消得，，

方程的判别式，

设，则，

所以，

由已知，

所以四边形*ACBD*面积，

设，则，，

所以，

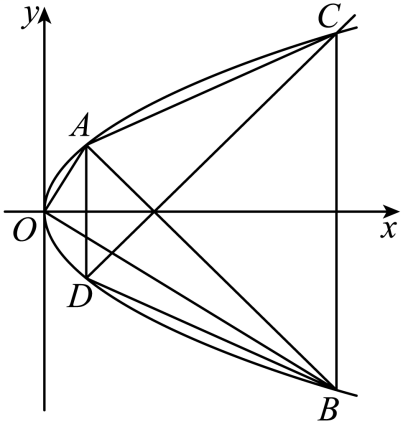
由基本不等式可得，当且仅当时等号成立，此时，

设，可得，，

所以当时，即时，取最小值，最小值为，

所以四边形*ACBD*面积的最小值为.

故答案为：.

 【点睛】关键点点睛：（1）解答直线与椭圆的题目时，时常把两个曲线的方程联立，消去*x*(或*y*)建立一元二次方程，然后借助根与系数的关系，并结合题设条件建立有关参变量的等量关系．（2）涉及到直线方程的设法时，务必考虑全面，不要忽略直线斜率为0或不存在等特殊情形．

**四、解答题（共6小题，共70分）**

17. 在中，角所对的边分别为，．

（1）求角；

（2）若的面积为，且，求的周长．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）利用正弦定理的边角变换与三角函数的恒等变换化简题干条件，从而得解；

（2）利用三角形面积公式与余弦定理分别得到与的值，从而求得，由此得解.

【小问1详解】

，

由正弦定理得，即，

即，，，





【小问2详解】

，

又，

所以，即（负值舍去），

又，所以的周长为.

18. 已知数列的首项，且满足.

（1）求证：是等比数列；

（2）求数列的前项和.

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）根据题意结合等比数列的定义分析证明；

（2）先根据等比数列的通项公式可得，再利用分组求和结合等比数列的求和公式运算求解.

【小问1详解】

因为，即，

则，

又因为，可得，

所以数列表示首项为，公比为的等比数列.

【小问2详解】

由（1）知，所以.

所以



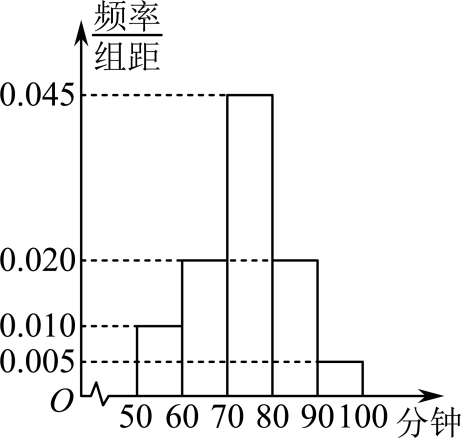
，

当为偶数时，可得；

当为奇数时，可得；

综上所述：.

19. 书籍是精神世界的入口，阅读让精神世界闪光，阅读逐渐成为许多人的一种生活习惯，每年4月23日为世界读书日．某研究机构为了解某地年轻人的阅读情况，通过随机抽样调查了位年轻人，对这些人每天的阅读时间（单位：分钟）进行统计，得到样本的频率分布直方图，如图所示．



（1）根据频率分布直方图，估计这位年轻人每天阅读时间的平均数（单位：分钟）；（同一组数据用该组数据区间的中点值表示）

（2）若年轻人每天阅读时间近似地服从正态分布，其中近似为样本平均数，求；

（3）为了进一步了解年轻人的阅读方式，研究机构采用分层抽样的方法从每天阅读时间位于分组，，的年轻人中抽取10人，再从中任选3人进行调查，求抽到每天阅读时间位于的人数的分布列和数学期望．

附参考数据：若，则①；②；③

．

【答案】（1）

（2）

（3）分布列见解析；期望为

【解析】

【分析】（1）根据频率分布直方图以及平均数的计算方法计算即可；

（2）依据，利用正态分布的对称性计算即可；

（3）先由题意得到随机变量的取值，并分别计算相应的概率，然后列出分布列，并按期望公式计算即可.

【小问1详解】

根据频率分布直方图得：

．

【小问2详解】

由题意知，即，

所以．

【小问3详解】

由题意可知，和的频率之比为：，

故抽取的10人中，和分别为：2人，4人，4人，

随机变量的取值可以为，

，，

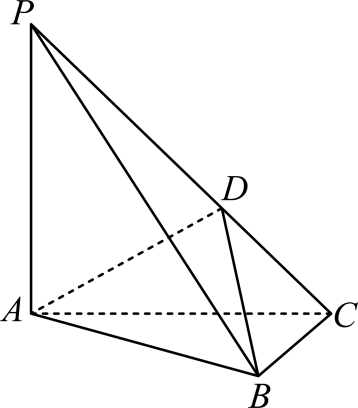
，，

故的分布列为：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

所以.

20. 如图所示，在三棱锥中，已知平面，平面平面．



（1）证明：平面；

（2）若，，在线段上（不含端点），是否存在点，使得二面角的余弦值为，若存在，确定点的位置；若不存在，说明理由．

【答案】（1）证明见解析

（2）存在；是上靠近的三等分点

【解析】

【分析】（1）过点作于点，由面面垂直性质定理可得平面，由此证明，再证明，根据线面垂直判定定理证明结论；

（2）建立空间直角坐标系，求平面，平面的法向量，利用向量夹角公式求法向量夹角，由条件列方程确定点的位置；

【小问1详解】

过点作于点，

因为平面平面，且平面平面，平面，

所以平面，

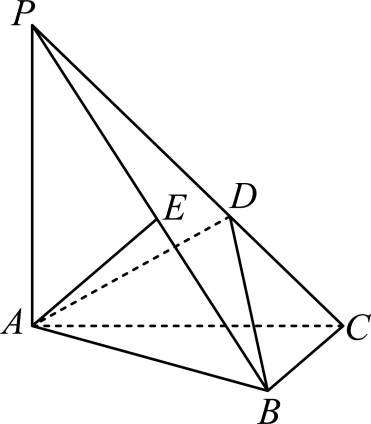
又平面，所以，

又平面，平面，

所以，

又因为，，平面，

所以平面．

 【小问2详解】

假设在线段上（不含端点），存在点，使得二面角的余弦值为，

以为原点，分别以、为轴，轴正方向，建立如图所示空间直角坐标系，

则，，，，

，，，，

设平面的一个法向量为，

即取，，，

所以为平面的一个法向量，

因为在线段上（不含端点），所以可设，，

所以，

设平面的一个法向量为，

即，

取，，，

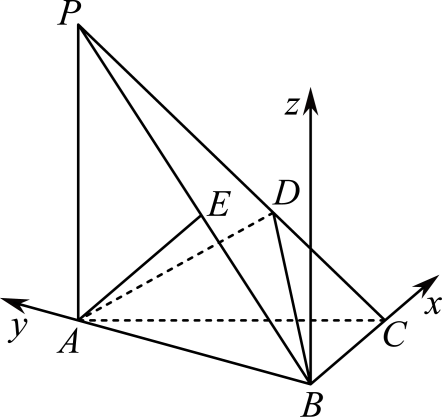
所以为平面的一个法向量，

，又，

由已知可得

解得或（舍去）， 所以，存在点，使得二面角的余弦值为，

此时是上靠近的三等分点．



21. 在平面直角坐标系中，已知点、，的内切圆与直线相切于点，记点*M*的轨迹为*C*.

（1）求*C*的方程；

（2）设点*T*在直线上，过*T*的两条直线分别交*C*于*A*、*B*两点和*P*，*Q*两点，连接.若直线的斜率与直线的斜率之和为0，试比较与的大小.

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（1）根据内切圆的性质得到，从而结合双曲线的定义得到轨迹方程；

（2）根据条件设，，，，，，根据直线与双曲线方程的联立，由韦达定理得到，，结合弦长公式得到，从而证明，进而可得相似于，由四点共圆的知识即可得到答案.

【小问1详解】

因为点、，的内切圆与直线相切于点，

所以，

因此根据双曲线的定义可知，点的轨迹为以，为焦点的双曲线的右支，

设点的轨迹*C*的方程为，焦距为，

所以，，

所以，，，

所以点的轨迹方程*C*为

【小问2详解】

由题意，直线的斜率互为相反数，记，

则，，，，，

设，则直线，.

联立直线和双曲线方程，

整理得.

该方程有两个不等实根，，

则

根据韦达定理可得，，

同理可得，.

又因为，.

，.

则，

同理可得

即

进而可得相似于，

即，，

也即*A*，*B*，*Q*，*P*四点共圆，可得

从而得.

因此

【点睛】关键点点睛：本题考查直线与双曲线的综合问题.关键在于直线与双曲线方程的联立，进而通过韦达定理的转化得到，进而得到相似于，由*A*，*B*，*Q*，*P*四点共圆，可得从而进而得到答案.本题考查学生的数据运算与分析能力、数形结合能力、转化与化归能力，属于难题.

22. 已知函数．

（1）当时，

（I）求处的切线方程；

（II）判断的单调性，并给出证明；

（2）若恒成立，求的取值范围．

【答案】（1）（I）；（II）单调递增，证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）由导数几何意义可求得切线的斜率，从而可求切线方程；由，令，求导判断单调性得，即可求解；

（2）当，取判断不成立；当时，三次求导结合隐零点进行判断不成立；当时，，可得，即

.

【小问1详解】

当时，，可得.

（I），

所以在处的切线方程为，即.

（II），

设，则单调递增，

所以，即，

所以当时，单调递增.

【小问2详解】

设，

由题意恒成立.

①当时，不恒成立，不合题意；

②当时，设，，

，，，

设，，，单调递增，

由零点存在定理得，使得.

在上，，即，

所以在上单调递减，，不恒成立，不合题意；

③当时， ，

则，

当时，，即，则，

所以当时，单调递增.

可得：，即，所以.

综上，的取值范围为．

【点睛】不等式恒成立问题常见方法：

①分离参数恒成立(即可)或恒成立（即可）；

②数形结合( 图象在 上方即可)；

③分类讨论参数.

公众号：高中试卷君