三校联考（一模）理科数学参考答案 2021.3.4

一．选择题：DBCAA CABBA CC

二．填空题：

13. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ 14. $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 15. 4 16. ①③

三．解答题：

17.解：

（1）设“这位小学生佩戴眼镜”为事件 A，“这位小学生佩戴的眼镜是角膜塑形镜”为事件 B，则所求的概率为：P（B|A） ……1 分

所以：$P(B\mid A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.08}{0.24}=\dfrac{1}{3}$ ……3 分

所以若从样本中选一位学生，已知这位小学生戴眼镜，

则他戴的是角膜塑形镜的概率是 $\dfrac{1}{3}$. ……4 分

（2）依题意可知：其中男生人数 X 的所有可能取值分别为：0，1，2 ……5 分

其中：$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{\frac{6\times5\times4}{6}}{\frac{8\times7\times6}{6}}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$；

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\dfrac{2\times\frac{6\times5}{2}}{\frac{8\times7\times6}{6}}=\dfrac{30}{56}=\dfrac{15}{28}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{6}{\frac{8\times7\times6}{6}}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$. ……8 分

所以男生人数 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{28}$

……9 分

（3）由已知可得：$Y\sim B(20,0.08)$ ……10 分

则：$E(Y)=n\times p=20\times 0.08=1.6$，$D(Y)=np(1-p)=20\times 0.08\times 0.92=1.472$

所以佩戴角膜塑形镜的人数 Y 的期望是1.6，方差是1.472．　……12 分

18. 解：由已知：$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{3}{2}(1+\cos 2x)+1$　……2 分

$=\sqrt{3}\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$　……4 分

（1）由$2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in z$得：

$f(x)$递减区间$[k\pi+\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{11\pi}{12}]$　$k\in z$．　……6 分

（2）由$f(C)=\sqrt{3}\sin(2C-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}=1$知：$\sin(2C-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \Delta ABC$为锐角三角形$\therefore C\in(0,\frac{\pi}{2})$　$\therefore 2C-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$

$\therefore 2C-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$　$\therefore C=\frac{\pi}{3}$　……8 分

由余弦定理得：

$a^2=CD^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}CD\cdot\cos\angle BDC$，$b^2=CD^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}CD\cdot\cos\angle ADC$，

且$\cos\angle BDC=-\cos\angle ADC$

故有：$CD^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{3}{4}$　……10 分

由$3=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab\ge a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

（当$a=b$时，等号成立）即：a^2+b^2的最大值为 6

所以：CD的最大值为$\frac{3}{2}$．　……12 分

19.(1) 证明：

在ΔA_1AC中：

$\because A_1C^2=4+1-2\times2\times1\times\frac{1}{2}=3 \quad \therefore A_1C^2+AC^2=AA_1^{\ 2}$,

$\therefore A_1C\perp AC$ ……2 分

又$A_1C\perp AB, AB\cap AC=A$

$\therefore A_1C\perp$平面ABC ……4 分

（2）由（1）知：A_1C, AC, BC 两两垂直，

以为C原点，以CA, CB, CA_1所在的边为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系

$A(1,0,0), B(0,b,0), C(0,0,0), A_1(0,0,\sqrt{3})$ ……5 分

设$\vec{n}=(x,y,z)$为平面BCB_1C_1法向量，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取$x=\sqrt{3}$得：$\vec{n}=(\sqrt{3},0,1)$ ……7 分

$\because \overrightarrow{BA_1}=(0,-b,\sqrt{3})$ $\therefore$由已知：$\left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{BA_1}>\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{b^2+3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$

解得：$b=1$，$B(0,1,0)$ ……9 分

设$\vec{m}=(x,y,z)$为平面A_1BB_1的法向量

$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=-x+\sqrt{3}z=0$

$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y=0$，取$x=\sqrt{3}$得：$\vec{m}=(\sqrt{3},\sqrt{3},1)$ ……11 分

$\therefore \cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{3+1}{\sqrt{3+1}\cdot\sqrt{3+3+1}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

所以二面角A_1-BB_1-C的余弦值为$\frac{2\sqrt{7}}{7}$ ……12 分

20.解:（1）由已知 $f'(x)=a^x\ln a-\ln a=\ln a(a^x-1)$ ……2 分

$\because 0<a<1\quad \therefore \ln a<0$

由 $f'(x)>0$ 得：$f(x)$ 增区间 $(0,+\infty)$

由 $f'(x)<0$ 得：$f(x)$ 减区间 $(0,-\infty)$ ……4 分

（2）由已知：$h(x)=a^x-x\ln a+x^2$

设 $h(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值为 M，最小值为 m

依题意：$M-m\geq e-1$ ……5 分

$\because h'(x)=a^x\ln a-\ln a+2x, h'(0)=0$

$\therefore h''(x)=a^x(\ln a)^2+2>0$

$\therefore h'(x)$ 为增函数

$\therefore x>0$ 时，$h'(x)>0, h(x)$ 递增；

$\therefore x<0$ 时，$h'(x)<0, h(x)$ 递减.

故 $m=h(0)=1\quad ,M=\max\{h(-1),h(1)\}$ ……7 分

设 $u(a)=h(1)-h(-1)=a-\dfrac{1}{a}-2\ln a\ , u(1)=0$

$\because u'(a)=1+\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{2}{a}=\dfrac{(a-1)^2}{a^2}\geq 0\quad (a>0)$

$\therefore u(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增

$\therefore a>1$ 时，$u(a)>0$，此时 $M=h(1)$

$\therefore 0<a<1$ 时，$u(a)<0$，此时 $M=h(-1)$ ……9 分

当$a>1$时，$M-m=a-\ln a$

设$G(a)=a-\ln a \quad (a>1)$ $\quad \therefore G'(a)=1-\dfrac{1}{a}>0, \therefore G(a)$在$(1,+\infty)$上递增，

又$G(e)=e-1$所以由$a-\ln a\ge e-1$得：$G(a)\ge G(e)\Leftrightarrow a\ge e$，

当$0<a<1$时，$M-m=\dfrac{1}{a}+\ln a, \dfrac{1}{a}>1$,

由$\dfrac{1}{a}+\ln a\ge e-1$得：$G(\dfrac{1}{a})\ge G(e)\Leftrightarrow \dfrac{1}{a}\ge e\Leftrightarrow 0<a\le\dfrac{1}{e}$. ……11 分

综上：a的取值范围是$(0,\dfrac{1}{e}]\cup[e,+\infty)$ ……12 分

21.解：(1)将$\ell: y=kx+2$代入$G: x^2=4y$得$x^2-4kx-8=0$，$\Delta=16(k^2+2)>0$.

令$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=4k, x_1x_2=-8$. ……2 分

抛物线 G 在点 A 处的切线方程为：$y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即$y=(\dfrac{x_1}{2})x-\dfrac{x_1^2}{4}$，

抛物线 G 在点 B 处的切线方程为：$y-\dfrac{x_2^2}{4}=\dfrac{x_2}{2}(x-x_2)$，即$y=(\dfrac{x_2}{2})x-\dfrac{x_2^2}{4}$， ……3 分

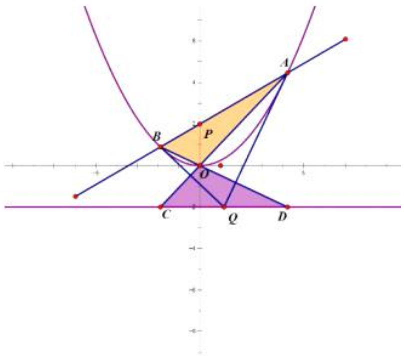
联立解得点Q的坐标为$(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{4})$，即$Q(2k,-2)$.

所以，点Q在定直线$m: y=-2$上. ……4 分

(2) (i)将$AO: y=(\dfrac{x_1}{4})x$与$m: y=-2$联立得$C(-\dfrac{8}{x_1},-2)$，

将$BO: y=(\dfrac{x_2}{4})x$与$m: y=-2$联立得$D(-\dfrac{8}{x_2},-2)$，

$\because x_c=-\dfrac{8}{x_1}=x_2, \therefore BC // y$轴，同理$AD // y$轴， ……6 分



$\therefore BC // AD, \therefore \Delta AOD \backsim \Delta BOC, \therefore \dfrac{|OA|}{|OC|}=\dfrac{|OD|}{|OB|}$，

即$|OA|\cdot|OB|=|OC|\cdot|OD|$. $\therefore S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}$. ……8 分

(ii) $|x_1-x_2|=4\sqrt{k^2+2}, y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$,

$P=S_{四边形ABCD}-2S_{\Delta OCD}$

$=\frac{1}{2}(|AD|+|BC|)\cdot|CD|-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|CD|$

$=\frac{1}{2}[(y_1+2)+(y_2+2)]\cdot|CD|-2|CD|$

$=2(k^2+1)|CD|$

$=8(k^2+1)\sqrt{k^2+2}$ ……10 分

令 $t=\sqrt{k^2+2}$，则 $t\ge\sqrt{2}$，令 $f(t)=8t(t^2-1)(t\ge\sqrt{2})$，

$\because f'(t)=8(3t^2-1)>0, \therefore f(t)$ 在 $[\sqrt{2},+\infty)$ 上递增，

$\therefore P_{\min}=f(\sqrt{2})=8\sqrt{2}$. $\therefore k=0$ 时，$P_{\min}=8\sqrt{2}$. ……12 分

22. 解：

（1）由 $\begin{cases}x=3\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}$ (α为参数)消去参数得 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$

Q $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$，所以曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2\cos^2\theta+9\rho^2\sin^2\theta=9$ ……5 分

（2）由（1）知：C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{9}{\cos^2\theta+9\sin^2\theta}$

设 $T(\rho_1,\alpha), N(\rho_2,\alpha+\frac{\pi}{2})$ 则：

$$S_{\Delta TON}=\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha}\cdot\frac{9}{\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{2})+9\sin^2(\alpha+\frac{\pi}{2})}$$

$$=\frac{81}{2}\cdot\frac{1}{9+16\sin^2 2\alpha}$$ ……8 分

$\because \sin^2 2\alpha\in[0,1]$ $\therefore S_{\Delta TON}\in[\frac{81}{50},\frac{9}{2}]$ ……10 分

23. 解：（1）当 $x<-1$ 时，$f(x)=1-2x, f(x)\ge 4-x$，解得 $x\le -3$；

当 $-1\le x\le 2$ 时，$f(x)=3, f(x)\ge 4-x$，解得 $x\ge 1$，即为 $1\le x\le 2$；

当 $x>2$ 时，$f(x)=2x-1, f(x)\ge 4-x$，解得 $x\ge \frac{5}{3}$，即为 $x>2$． ……3 分

综上可得 $x\ge 1$ 或 $x\le -3$．

所以不等式的解集为 $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$； ……5 分

（2）由于 $|x-2|+|x+1|\ge|(x-2)-(x+1)|=3$（当且仅当 $-1\le x\le 2$, 等号成立），

所以 $\{y|y=f(x)\}$，故 $a\ge 3, b\ge 3$, ……7 分

$2(a+b)-(ab+4)=2a-ab+2b-4=(a-2)(2-b)$，

由于 $a\ge 3, b\ge 3$, 则 $a-2>0, 2-b<0$,

即有 $(a-2)(2-b)<0$，则 $2(a+b)<ab+4$． ……10 分

教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。