天一大联考
2022—2023 学年高一年级阶段性测试(五)
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. C　　2. B　　3. D　　4. C　　5. B　　6. A

7. B　　8. D

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. ABD　　10. BC　　11. AD　　12. ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 3　　14. 1

15. 0.95　　16. $\left(-\frac{81}{2},0\right)$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)$|3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{9|\boldsymbol{a}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2}$

$=\sqrt{9\times1^2-12\times1\times2\times\cos60^\circ+4\times2^2}=\sqrt{13}$. ……………………(4 分)

(Ⅱ)$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2}$

$=\sqrt{4\times1^2+4\times1\times2\times\cos60^\circ+2^2}=2\sqrt{3}$. ……………………(7 分)

所以 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的长度为

$\frac{|(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})|}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{|2|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-|\boldsymbol{b}|^2|}{|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\frac{|2\times1^2-1\times2\times\cos60^\circ-2^2|}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………(10 分)

18. **解析**　(Ⅰ)由频率分布直方图可知$(a+0.015+0.035+b+a)\times10=1$,即 $b+2a=0.05$, ……………………(2 分)

又 $b=3a$,所以 $a=0.01$,$b=0.03$. ……………………(3 分)

前三组的频率之和为 $0.1+0.15+0.35=0.6<0.75$,前四组的频率之和为 $0.6+0.3=0.9>0.75$, …(4 分)

则 75% 分位数 $m\in[80,90)$,且 $m=80+\frac{0.75-0.6}{0.9-0.6}\times10=85$. ……………………(6 分)

(Ⅱ)成绩在$[80,90)$和$[90,100]$内的人数之比为 $3:1$, ……………………(7 分)

故抽取的 4 人中成绩在$[80,90)$内的有 3 人,设为 a,b,c,成绩在$[90,100]$内的有 1 人,设为 D,………(8 分)

再从这 4 人中选 2 人,这 2 人的所有可能情况为(a,b),(a,c),(a,D),(b,c),(b,D),(c,D),共 6 种,

……………………(10 分)

这 2 人成绩均在$[80,90)$内的情况有(a,b),(a,c),(b,c),共 3 种, ……………………(11 分)

故这 2 人成绩都在$[80,90)$内的概率为 $P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. ……………………(12 分)

19. **解析**　(Ⅰ)设事件 A 表示“甲加工的零件质检合格”,事件 A_1 表示“甲加工的零件首次质检合格”,事件 A_2 表示“甲重新加工的零件再次质检合格”;设事件 B 表示“乙加工的零件质检合格”,事件 B_1 表示“乙加工的零件首次质检合格”,事件 B_2 表示“乙重新加工的零件再次质检合格”.

则 $P(A)=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{8}$, …………………………………………………………（2 分）

$P(B)=P(B_1)+P(\bar{B}_1)P(B_2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}$, …………………………………………………………（4 分）

所以 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{7}{8}\times\frac{8}{9}=\frac{7}{9}$. …………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）设事件 M 表示“这 2 个零件的价格之和不低于 100 元”，则 $M=(A_1\bar{B})\cup(\bar{A}B_1)\cup(AB)$，

$P(A_1\bar{B})=P(A_1)[1-P(B)]=\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{1}{12}$,

$P(\bar{A}B_1)=[1-P(A)]P(B_1)=\left(1-\frac{7}{8}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$,

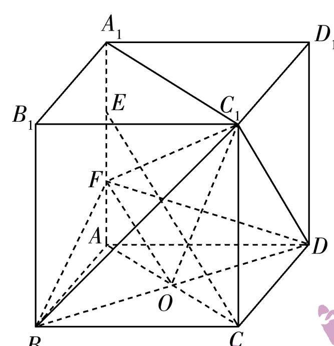
则 $P(M)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{7}{9}=\frac{17}{18}$. …………………………………………………………（12 分）

20. **解析**　（Ⅰ）如图，连接 AC 交 BD 于点 O，连接 OF.

在 $\triangle ACE$ 中，O 为 AC 的中点，F 为 AE 的中点，所以 $OF/\!/CE$, …………………………………………（2 分）

又 $CE\not\subset$ 平面 BDF，$OF\subset$ 平面 BDF，

所以 $CE/\!/$ 平面 BDF. …………………………………………………………（4 分）



（Ⅱ）连接 C_1O，C_1F，A_1C_1.

在正方体中，$BD\perp AC$，$AA_1\perp BD$，$AC\cap AA_1=A$，所以 $BD\perp$ 平面 A_1AC，

而 OF，OC_1 均在平面 A_1AC 内，所以 $BD\perp OF$，$BD\perp OC_1$， …………………………………………（6 分）

所以 $\angle FOC_1$ 是二面角 C_1-BD-F 的平面角. …………………………………………………………（7 分）

因为正方体的棱长为 3，所以 $AC=3\sqrt{2}$，$AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$AF=1$， …………………………………………（8 分）

由勾股定理得 $FO=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$，$C_1O=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+3^2}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$，$C_1F=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$.

在 $\triangle FOC_1$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle FOC_1=\frac{FO^2+C_1O^2-C_1F^2}{2FO\cdot C_1O}=-\frac{\sqrt{33}}{33}$，

所以二面角 C_1-BD-F 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{33}}{33}$. …………………………………………………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）由条件及正弦定理得 $b^2-a^2=(a+c)c$, …………………………………………………………（2 分）

即 $b^2-a^2=ac+c^2$，得 $a^2+c^2-b^2=-ac$， …………………………………………………………（3 分）

由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，…………………………………………………………………………（4 分）

又 $0<B<\pi$，所以 $B=\dfrac{2\pi}{3}$. …………………………………………………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为 BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

所以 $\angle ABD=\angle DBC=\dfrac{\pi}{3}$.

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，可得 $\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\times BD\times\sin\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{2}a\times BD\times\sin\dfrac{\pi}{3}$. ……………（8 分）

因为 $a=3$，$BD=2$，所以 $3c=2c+6$，解得 $c=6$，…………………………………………………………………（10 分）

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times3\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………………（12 分）

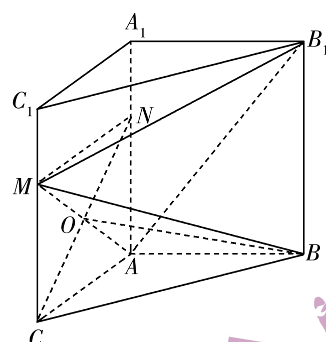
22. **解析**　（Ⅰ）连接 MN. 由已知可得 $CM=AN=2$，……………………………………………………………（1 分）

又 $AC=2$，易得四边形 $ANMC$ 是正方形，则 $AM\perp CN$. ……………………………………………………………（2 分）

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp AB$，……………………………（3 分）

又因为 $AB\perp AC$，$AC\cap AA_1=A$，所以 $AB\perp$ 平面 ACC_1A_1，因为 $CN\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $AB\perp CN$.

又 $AB\cap AM=A$，所以 $CN\perp$ 平面 ABM. …………………………………………………………………………（4 分）



（Ⅱ）连接 B_1A，B_1M，如图所示.

因为 $AC\perp AB$，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，

所以 $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，又 $CC_1\parallel$ 平面 ABB_1A_1，

所以点 M 到平面 ABB_1 的距离即为 $AC=2$. ………………………………………………………………………（5 分）

设点 B_1 到平面 ABM 的距离为 d.

由 $V_{B_1-ABM}=V_{M-ABB_1}$，得 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABM}\cdot d=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABB_1}\cdot AC$，…………………………………………………………（6 分）

即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AB\times AM\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AB\times BB_1\times AC$，

得 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\sqrt{2}\times d=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times3\times2$，

解得 $d=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

即点 B_1 到平面 ABM 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………………………（8 分）

(Ⅲ)如图,设 AM 与 CN 相交于点 O,连接 BO.

由(Ⅰ)知,$CN\perp$平面 ABM,所以$\angle CBO$ 是直线 BC 与平面 ABM 所成的角. …………………………… (9 分)

由勾股定理得 $CO=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$,$BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, ………………………………………………… (10 分)

则 $\sin\angle CBO=\frac{CO}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$,得$\angle CBO=30^\circ$,

故直线 BC 与平面 ABM 所成的角为 30°. ……………………………………………………………………………… (12 分)