绝密★启用前

2020—2021学年高中毕业班阶段性测试(三)

理科数学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|2x^2-9x-5<0\}$, $N=\{x|y=-\lg(10-x)\}$,则 $M\cap N=$

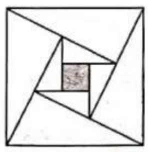
A. $\{x|x<10\}$　　B. $\mathbf{R}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<5\right\}$　　D. $\{x|5<x<10\}$

2. 复数 $z=\frac{2i^7}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 三国时期的吴国数学家赵爽根据一幅"勾股圆方图",用数形结合的方法给出了勾股定理的详细证明,他所绘制的勾股圆方图被后世称为"赵爽弦图".如图所示的图形就是根据赵爽弦图绘制而成的,图中的四边形都是正方形,三角形都是相似的直角三角形,且两条直角边长之比均为2.现从整个图形内随机取一点,则该点取自小正方形(阴影部分)内的概率为



A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{25}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{36}$

4. 函数 $f(x)=3\sin(\pi+x)-\cos 2x+3$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为

A. -1　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{7}{8}$　　D. 1

5. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数,且当 $x<0$ 时, $f(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$,则 $f(x)$ 的图象在点 $(2,f(2))$ 处的切线的方程是

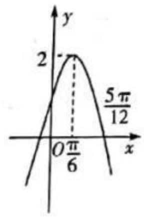
A. $5x-y-2=0$　　B. $x-2y+5=0$

C. $2x-y-4=0$　　D. $x-5y-2=0$

6. 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1a_3=\frac{1}{4}$, $a_2a_4=1$,则 $a_{11}=$

A. 64　　B. 128　　C. 256　　D. 512

7. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图，则



A. $f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

B. $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2}$

C. $f(x)$ 的图象的对称中心为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$

D. 不等式 $f(x)\geqslant 1$ 的解集为 $\left[k\pi,k\pi+\dfrac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

8. 已知 $(x^2-a)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数之和为 -64，则其常数项为

A. -25　　B. -5　　C. 20　　D. 55

9. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，以 $P(-2,0)$ 为圆心，半径为 5 的圆与抛物线 C 交于 A,B 两点，若 $|OA|=\sqrt{17}$（点 O 为坐标原点），则 $p=$

A. 4　　B. 8　　C. 10　　D. 16

10. 若实数 a,b 满足 $2^a=2-a$，$\log_2(b-1)=3-b$，则 $a+b=$

A. 3　　B. $\dfrac{10}{3}$　　C. $\dfrac{7}{2}$　　D. 4

11. 设 $m\in\mathbf{R}$，动直线 $l_1:x+my=0$ 过定点 A，动直线 $l_2:mx-y-m+3=0$ 过定点 B，且 l_1,l_2 交于点 $P(x,y)$，则 $|PA|+|PB|$ 的最大值是

A. $\sqrt{10}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 5　　D. 10

12. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$，$g(x)=xe^x$，若对任意 $x_1,x_2\in(0,e]$，不等式 $\dfrac{g(x_1)}{k+1}\leqslant\dfrac{f(x_2)}{k}$ 恒成立，则正数 k 的取值范围为

A. $\left(\dfrac{4}{e^{e+1}},\dfrac{1}{e}\right]$　　B. $(e,4]$

C. $\left(0,\dfrac{e^{e+1}}{4-e}\right]$　　D. $\left(0,\dfrac{4}{e^{e+1}-4}\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-3y+6\geqslant 0,\\3x+y-3\leqslant 0,\\x+3y+3\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=3x-2y$ 的最大值为________.

14. 已知 $A(1,0)$，$B(m,2)$，$C(0,5)$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{25}{4}$，则 $m=$________.

15. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$ 上有三个点 A,B,C，且 AB,BC,AC 的中点分别为 D,E,F，用字母 k 表示斜率，若 $k_{OD}+k_{OE}+k_{OF}=-8$（点 O 为坐标原点，且 k_{OD},k_{OE},k_{OF} 均不为零），则 $\dfrac{1}{k_{AB}}+\dfrac{1}{k_{BC}}+\dfrac{1}{k_{AC}}=$________.

16. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，侧棱长均为 $\sqrt{6}$. 以 P 为球心，$\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 为半径的球面与底面 $ABCD$ 的交线总长度为________.

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$\frac{\sin A}{a}+\frac{\sin B}{b}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$.

(Ⅰ)求$\sin C$和$\cos C$;

(Ⅱ)若$a=\sqrt{5}b$,$\triangle ABC$的面积为2,求c.

18. (12 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,$\{b_n\}$是等比数列,$a_1=5$,$S_{10}=185$,$a_1b_1=5$,$a_2b_2^3=1$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和T_n.

19. (12 分)

某工厂生产甲、乙两种电子产品,甲产品的正品率为p(p为常数且$0<p<0.9$),乙产品的正品率为$p+0.1$. 生产1件甲产品,若是正品,则可盈利4万元,若是次品,则亏损1万元;生产1件乙产品,若是正品,则可盈利6万元,若是次品,则亏损2万元. 设生产各件产品相互独立.

(Ⅰ)记X(单位:万元)为生产1件甲产品和1件乙产品可获得的总利润,若$E(X)=8.2$,求p;

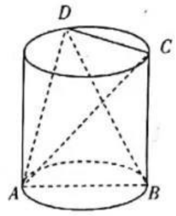
(Ⅱ)在(Ⅰ)的条件下,求生产4件甲产品所获得的利润不少于11万元的概率.

20.（12 分）

如图所示，四面体 $ABCD$ 的顶点都在圆柱的上、下底面圆周上，且 AB 是下底面圆的直径，BC 是圆柱的母线.

（Ⅰ）求证：$AD\perp CD$；

（Ⅱ）若 $AB=BC$，异面直线 AB 与 CD 所成的角为 $30°$，求二面角 $A-BD-C$ 的余弦值.



21.（12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_1 和点 $(0,1)$ 的直线与椭圆交于 M,N 两点，F_2 到直线 MN 的距离为 $\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若点 $P(0,t)$ 满足 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\leqslant\frac{6}{5}t+\frac{33}{5}$，求 $\triangle PMN$ 的面积的最大值.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\left(\ln x+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{x^2+2}{x}(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 $a=-1$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，证明：当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f(x)-f'(x)>\frac{3}{2}$.

天一大联考
2020—2021 学年高中毕业班阶段性测试(三)
理科数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查不等式的解法、函数的定义域、交集运算.

解析 因为 $M=\{x|2x^2-9x-5<0\}=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<5\right\}$,$N=\{x|y=-\lg(10-x)\}=\{x|x<10\}$,所以 $M\cap N=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<5\right\}$.

2. 答案 D

命题意图 本题考查复数的概念与运算,复数的几何意义.

解析 因为 $i^7=-i$,所以 $z=\frac{2i^7}{1-i}=\frac{-2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1-i$,所以 z 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$,位于第四象限.

3. 答案 B

命题意图 本题考查数学文化,几何概型.

解析 设小正方形的边长为 1,则与小正方形相邻的四个直角三角形的直角边长分别为 2 和 1,从而可得斜边长为$\sqrt{5}$,外围较大的直角三角形的直角边长分别为 $2\sqrt{5}$ 和$\sqrt{5}$,于是大正方形的边长为 5,根据几何概型的概率计算公式可知所求概率为$\frac{1^2}{5^2}=\frac{1}{25}$.

4. 答案 C

命题意图 本题考查三角恒等变换,二次函数的最值.

解析 $f(x)=3\sin(\pi+x)-\cos 2x+3=-3\sin x-(1-2\sin^2 x)+3=2\sin^2 x-3\sin x+2=2\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$. 因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin x\in[-1,1]$,所以当 $\sin x=\frac{3}{4}$时,$f(x)$取得最小值$\frac{7}{8}$.

5. 答案 D

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 因为$f(x)$是奇函数,所以$f(2)=-f(-2)=0$,且$f(x)$在$(2,0)$和$(-2,0)$两点处的切线斜率相等. 当 $x<0$时,$f'(x)=\frac{x^2+1-2x(x+2)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$,所以$f'(2)=f'(-2)=\frac{1}{5}$,所以$f(x)$的图象在点$(2,0)$处的切线的方程是 $y-0=\frac{1}{5}(x-2)$,即 $x-5y-2=0$.

6. 答案 C

命题意图 本题考查等比数列的性质,基本量的计算.

解析 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$,由已知条件可得$\begin{cases}a_1^2q^2=\frac{1}{4},\\ a_1^2q^4=1,\end{cases}$解得 $q=2$,$a_1=\frac{1}{4}$. 所以 $a_n=2^{n-3}$,所以 $a_{11}=2^8=256$.

7. 答案 D

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 由图知$f(x)$的最小正周期$T=4\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,所以$\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,因为点$\left(\frac{\pi}{6},2\right)$在$f(x)$的图象上,所以$2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$,所以$\varphi+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,又因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,所以$k=0$,即$\varphi=\frac{\pi}{6}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,所以A错误;因为$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,所以B错误;令$2x+\frac{\pi}{6}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,则$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$,即$f(x)$的图象的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$,所以C错误;令$2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\geqslant1$,则$2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$,所以$k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,所以不等式$f(x)\geqslant1$的解集为$\left[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$,所以D正确.

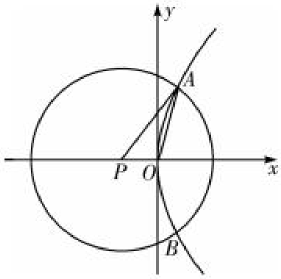
8. **答案** A

命题意图 本题考查二项式定理.

解析 因为$(x^2-a)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中所有项的系数和为$-64$,所以$(1-a)\cdot2^6=-64$,所以$a=2$,$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式通项为$T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=C_6^r\cdot x^{6-2r}$,所以展开式的常数项为$C_6^4-2C_6^3=-25$.

9. **答案** B

命题意图 本题考查抛物线的性质、余弦定理.



解析 如图,在$\triangle AOP$中,$|AP|=5$,$|OP|=2$,$|OA|=\sqrt{17}$,由余弦定理得$\cos\angle AOP=-\frac{\sqrt{17}}{17}$,所以$\cos\angle AOx=\frac{\sqrt{17}}{17}$,所以$A(1,4)$,代入方程$y^2=2px(p>0)$,可得$p=8$.

10. **答案** A

命题意图 本题考查指数函数和对数函数的性质.

解析 由条件可知$2^a+a=2$,$(b-1)+\log_2(b-1)=2$,因为函数$y=2^x+x$在$\mathbf{R}$上单调递增,因此方程$2^x+x=2$有唯一实根,因此$a=\log_2(b-1)$,$2^a=b-1$,所以$2-a=b-1$,因此$a+b=3$.

11. **答案** B

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系,距离和的最值.

解析 由题意知,直线l_1过定点$A(0,0)$,直线l_2:$m(x-1)-y+3=0$过定点$B(1,3)$,且$l_1\perp l_2$,即$PA\perp PB$,所以$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2=10$,所以$(|PA|+|PB|)^2\leqslant2(|PA|^2+|PB|^2)=20$,当且仅当$|PA|=|PB|$时取等号,所以$|PA|+|PB|$的最大值是$2\sqrt{5}$.

12. **答案** D

命题意图 本题考查函数的单调性、最值,通过不等式恒成立求参数的取值范围.

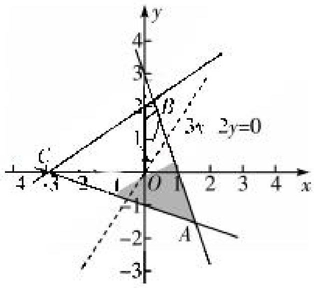
解析 对任意$x_1,x_2\in(0,e]$,不等式$\frac{g(x_1)}{k+1}\leqslant\frac{f(x_2)}{k}$恒成立等价于$\left[\frac{g(x_1)}{k+1}\right]_{max}\leqslant\left[\frac{f(x_2)}{k}\right]_{min}$. 因为$x\in(0,e]$,所以$f(x)=\frac{x^2+4}{x}=x+\frac{4}{x}\geqslant4$,当且仅当$x=2$时取等号,所以$f(x)_{min}=f(2)=4$,即$\left[\frac{f(x_2)}{k}\right]_{min}=\frac{4}{k}$. 当$x\in(0,e]$时,$g'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)>0$,所以$g(x)$在$(0,e]$上单调递增,所以$g(x)_{max}=g(e)=e^{e+1}$,所以$\left[\frac{g(x_1)}{k+1}\right]_{max}=\frac{e^{e+1}}{k+1}$. 由$\frac{4}{k}\geqslant\frac{e^{e+1}}{k+1}$得$\frac{e^{e+1}}{4}\leqslant\frac{k+1}{k}=1+\frac{1}{k}$,所以$\frac{1}{k}\geqslant\frac{e^{e+1}-4}{4}$,所以$0<k\leqslant\frac{4}{e^{e+1}-4}$.

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. **答案** $\frac{15}{2}$

命题意图 本题考查不等式组表示的平面区域,线性目标函数的最值.

解析 如图所示，作出不等式组表示的平面区域，平移直线 $3x-2y=0$，当经过点 A 时，目标函数 $z=3x-2y$ 取得最大值. 解方程组 $\begin{cases}3x+y-3=0,\\ x+3y+3=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2},\\ y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ 即 $A\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，所以 $z_{\max}=3\times\dfrac{3}{2}-2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{15}{2}$.



14. **答案** $\dfrac{1}{2}$

命题意图 本题考查平面向量的坐标运算、数量积运算.

解析 由条件得 $\overrightarrow{AB}=(m-1,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-m,3)$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(m-1,2)\cdot(-m,3)=-m^2+m+6=\dfrac{25}{4}$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$.

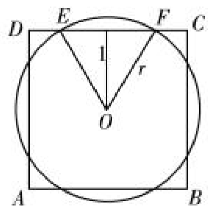
15. **答案** -1

命题意图 本题考查双曲线的性质.

解析 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_0,y_0)$，则 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，$x_1^2-\dfrac{y_1^2}{8}=1$，$x_2^2-\dfrac{y_2^2}{8}=1$，两式相减得 $(x_1-x_2)(x_1+x_2)=\dfrac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{8}$，整理可得 $\dfrac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=\dfrac{y_0}{8x_0}$，即 $\dfrac{1}{k_{AB}}=\dfrac{k_{OD}}{8}$，同理得 $\dfrac{1}{k_{BC}}=\dfrac{k_{OE}}{8}$，$\dfrac{1}{k_{AC}}=\dfrac{k_{OF}}{8}$. 因为 $k_{OD}+k_{OE}+k_{OF}=-8$，所以 $\dfrac{1}{k_{AB}}+\dfrac{1}{k_{BC}}+\dfrac{1}{k_{AC}}=\dfrac{1}{8}(k_{OD}+k_{OE}+k_{OF})=-1$.

16. **答案** $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

命题意图 本题考查空间几何体的结构特征.



解析 设正方形 $ABCD$ 的中心为 O，由题可知 $|OA|=\sqrt{2}$，设四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 h，则 $h^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2$，所以 $h=2$. 设球 P 被平面 $ABCD$ 所截的圆的半径为 r，则 $r^2+h^2=\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$，可得 $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. 如图所示，球面与底面 $ABCD$ 的交线即为圆 O 在正方形 $ABCD$ 内的部分，由 $r=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 可知 $\triangle OEF$ 为等边三角形，$\overset{\frown}{EF}$ 所对圆心角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则圆 O 在正方形 $ABCD$ 内的部分所对的圆心角之和为 $2\pi-4\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，因此交线的总长度为 $r\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正弦定理、余弦定理的应用.

解析 （Ⅰ）由余弦定理，原式化为 $\dfrac{\sin A}{a}+\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\cos C}{c}$，

再由正弦定理可得 $\dfrac{\sin A}{\sin A}+\dfrac{\sin B}{\sin B}=\dfrac{\cos C}{\sin C}=2$，……………………（2 分）

又因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，$C\in(0,\pi)$，

可得 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………（5分）

（Ⅱ）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=2$，所以 $ab=4\sqrt{5}$，…………（6分）

因为 $a=\sqrt{5}b$，所以 $a=2\sqrt{5}, b=2$. …………（7分）

由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=20+4-2\times2\sqrt{5}\times2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=8$，…………（9分）

所以 $c=2\sqrt{2}$. …………（10分）

18. **命题意图** 本题考查等差数列、等比数列的性质、分组法求数列的前 n 项和.

解析 （Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q.

因为 $a_1=5, S_{10}=10a_1+45d=185$，解得 $d=3$. …………（2分）

所以 $a_n=5+3(n-1)=3n+2$. …………（3分）

由 $a_1b_1=5$ 得 $b_1=1$，由 $a_2b_2^3=1$ 得 $b_2=\frac{1}{2}$，所以 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\frac{1}{2}$，…………（5分）

所以 $b_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. …………（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $a_nb_n=(3n+2)\times\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以 $T_n=5\times1+8\times\frac{1}{2}+11\times\frac{1}{2^2}+\cdots+(3n+2)\times\frac{1}{2^{n-1}}$，

所以 $\frac{1}{2}T_n=5\times\frac{1}{2}+8\times\frac{1}{2^2}+11\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$，…………（8分）

两式相减得 $\frac{1}{2}T_n=2+3+3\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+\cdots+3\times\frac{1}{2^{n-1}}-(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$

$$=2+3\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-(3n+2)\times\frac{1}{2^n}$$

$$=8-\frac{3n+8}{2^n}.$$ …………（10分）

所以 $T_n=16-\frac{3n+8}{2^{n-1}}$. …………（12分）

19. **命题意图** 本题考查独立事件的概率，随机变量的分布列与数学期望.

解析 （Ⅰ）由题设知，X 的可能取值为 $10,5,2,-3$，…………（1分）

且 $P(X=10)=p(p+0.1)$，$P(X=5)=(1-p)(p+0.1)$，

$P(X=2)=p(1-p-0.1)=p(0.9-p)$，$P(X=-3)=(1-p)(1-p-0.1)=(1-p)(0.9-p)$.

所以 X 的分布列为：

X	-3	2	5	10
P	$(1-p)(0.9-p)$	$p(0.9-p)$	$(1-p)(p+0.1)$	$p(p+0.1)$

…………（4分）

所以 $E(X)=-3(1-p)(0.9-p)+2\times p(0.9-p)+5\times(1-p)(p+0.1)+10\times p(p+0.1)=13p-2.2$，

因为 $E(X)=8.2$，所以 $13p-2.2=8.2$，解得 $p=0.8$. …………（6分）

（Ⅱ）设生产的4件甲产品中正品有 n 件，则次品有 $4-n$ 件，

由题意知，$4n-(4-n)\geqslant11$，则 $n=3$ 或 $n=4$. …………（8分）

所以 $P=C_4^3\times0.8^3\times0.2+0.8^4=0.8192$.

故所求概率为 0.819 2. ………………………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查圆柱的结构特征,空间位置关系的证明以及空间向量的应用.

解析 (Ⅰ)如图,过点 D 作圆柱的母线 DE,连接 AE,BE. ………………………… (1 分)

因为母线 DE 与底面垂直,所以 $DE\perp BE$,

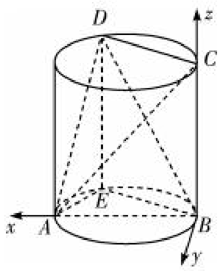
因为 AB 是底面圆的直径,所以 $AE\perp BE$, ………………………………………… (2 分)

又 $AE\cap DE=E$,所以 $BE\perp$ 平面 AED, ………………………………………… (3 分)

由 $DE/\!/BC$ 且 $DE=BC$,可知 $CD/\!/BE$,所以 $CD\perp$ 平面 AED.

又 $AD\subset$ 平面 AED,

所以 $AD\perp CD$. ……………………………………………………………… (5 分)



(Ⅱ)如图所示,以 B 为坐标原点,以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ 的方向为 x 轴,z 轴正方向建立空间直角坐标系.

设 $AB=BC=2$.

因为异面直线 AB 和 CD 所成的角为 30°,所以 $\angle ABE=30°$. ………………… (6 分)

所以 $B(0,0,0),A(2,0,0),C(0,0,2),E\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),D\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$,

所以 $\overrightarrow{BA}=(2,0,0),\overrightarrow{BD}=\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},2\right),\overrightarrow{BC}=(0,0,2)$. ………………………………… (7 分)

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BA}\cdot\boldsymbol{m}=2x_1=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{3}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+2z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=\sqrt{3}$,可得 $\boldsymbol{m}=(0,4,\sqrt{3})$. ……………………… (9 分)

设平面 CBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=2z_2=0,\\ \overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{3}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+2z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},0)$. ……………………… (10 分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{19}\times 2}=\frac{2\sqrt{57}}{19}$, ………………………………… (11 分)

结合图形可知二面角 $A-BD-C$ 的余弦值为 $-\frac{2\sqrt{57}}{19}$. ………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质,直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)设 $F_1(-c,0),F_2(c,0),c>0$.

直线 MN 过点 F_1 和点 $(0,1)$,则其方程为 $y=\frac{1}{c}x+1$, ………………………… (1 分)

因为 F_2 到直线 MN 的距离为 $\sqrt{2}$,所以 $\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+1}}=\sqrt{2}$,解得 $c=1$. ………………………… (3 分)

由 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 得 $a=\sqrt{3}$,所以 $b^2=a^2-c^2=3-1=2$, ………………………… (4 分)

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………… (5 分)

(Ⅱ)设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,

由(Ⅰ)知直线 MN 的方程为 $y=x+1$,由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=x+1\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2+6x-3=0$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{6}{5}, x_1x_2=-\frac{3}{5}$, …… (6 分)

所以 $y_1+y_2=-\frac{6}{5}+2=\frac{4}{5}, y_1y_2=x_1x_2+x_1+x_2+1=-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}+1=-\frac{4}{5}$.

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(x_1,y_1-t)\cdot(x_2,y_2-t)=x_1x_2+y_1y_2-t(y_1+y_2)+t^2$

$=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}-\frac{4}{5}t+t^2=t^2-\frac{4}{5}t-\frac{7}{5}$, …… (8 分)

根据条件 $t^2-\frac{4}{5}t-\frac{7}{5}\leqslant\frac{6}{5}t+\frac{33}{5}$, 解得 $-2\leqslant t\leqslant 4$. …… (9 分)

又因为 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$,

所以 $\triangle PMN$ 的面积 $S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|x_1-x_2||t-1|=\frac{2\sqrt{6}}{5}|t-1|$, …… (11 分)

当 $t=-2$ 或 $t=4$ 时, $\triangle PMN$ 的面积最大, 最大值为 $\frac{6\sqrt{6}}{5}$. …… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查导数的计算, 以及利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2a}{x^3}+1-\frac{2}{x^2}=\frac{x^3+ax^2-2x-2a}{x^3}=\frac{(x+a)(x^2-2)}{x^3}$. …… (1 分)

若 $a\geqslant 0$, 则当 $x\in(0,\sqrt{2})$ 时 $f'(x)<0$, 当 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时 $f'(x)>0$,

所以 $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 符合条件. …… (2 分)

若 $a<0$, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=-a$ 或 $x=\sqrt{2}$,

若 $-\sqrt{2}<a<0$, 则当 $x\in(0,-a)$ 和 $x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, 当 $x\in(-a,\sqrt{2})$ 时 $f'(x)<0$,

所以 $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 符合条件. …… (3 分)

若 $a=-\sqrt{2}$, 则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立, $f(x)$ 没有极值点, 不符合条件.

若 $a<-\sqrt{2}$, 则当 $x\in(0,\sqrt{2})$ 和 $x\in(-a,+\infty)$ 时 $f'(x)>0$, 当 $x\in(\sqrt{2},-a)$ 时 $f'(x)<0$,

所以 $x=\sqrt{2}$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 不符合条件. …… (4 分)

因此 a 的取值范围是 $(-\sqrt{2},+\infty)$. …… (5 分)

(Ⅱ) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=-\ln x-\frac{1}{x^2}+x+\frac{2}{x}$, $f'(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}+1-\frac{2}{x^2}$,

则 $f(x)-f'(x)=x-\ln x-1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}, x\in[1,2]$.

设 $g(x)=x-\ln x-1, h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}, x\in[1,2]$. …… (6 分)

由 $g'(x)=1-\frac{1}{x}\geqslant 0$, 可得 $g(x)\geqslant g(1)=0$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号. …… (8 分)

$h'(x)=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4}$,

设 $\varphi(x)=-3x^2-2x+6$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减,

因为 $\varphi(1)=1, \varphi(2)=-10$, 故存在 $x_0\in[1,2]$, 使得当 $x\in(1,x_0)$ 时 $\varphi(x)>0$, 当 $x\in(x_0,2)$ 时, $\varphi(x)<0$,

所以 $h(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0,2)$ 上单调递减, …… (10 分)

由于 $h(1)=2, h(2)=\frac{3}{2}$, 所以 $h(x)\geqslant h(2)=\frac{3}{2}$, 当且仅当 $x=2$ 时取等号. …… (11 分)

因此当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时, $f(x)-f'(x)=g(x)+h(x)>g(1)+h(2)=\frac{3}{2}$. …… (12 分)

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “ 专业、专注、有态度 ” 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。