哈师大附中第三次模拟考试理科数学答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	D	C	B	A	D	D	C	C	A	C

二、填空题（第 16 题第一个空 2 分，第二个空 3 分）

13. 0.72　　14. $C_{42}H_{24}$　　15. $(1,+\infty)$　　16. $\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}$

三、解答题

17.（I）$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}+2=0$……2 分

$\Rightarrow c_{n+1}-c_n=2, c_1=\frac{a_1}{b_1}=2$

$\therefore \{c_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列……4 分

$c_n=2+(n-1)\bullet 2=2n$ ……6 分

（II）由（I）知，$c_n=\frac{a_n}{b_n}=2n, \therefore a_n=\frac{2n}{3^n}$……8 分

设 $T_n=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^n}$

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n}{3^{n+1}}$

$\therefore \frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-(n+\frac{3}{2})\bullet\frac{1}{3^{n+1}}$

$\therefore T_n=\frac{3}{4}-\frac{(2n+3)}{4}\bullet\frac{1}{3^n}$

$\therefore S_n=2T_n=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2}\bullet\frac{1}{3^n}$

18.（Ⅰ）根据所给数据可知 B 套餐平均销量高于 A 套餐，但是 A 套餐销售情况比 B 套餐更稳定，波动性小；……2 分

（Ⅱ）设“一周内 B 套餐连续两天中至少有一天销量业绩“优秀””为事件 C，……3 分

则 $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$　　……5 分

（Ⅲ）$X=0,1,2$

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{1}{5}$

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{3}{5}$

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{1}{5}$

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

……10 分（错一处扣两分，没列分布列扣一分）

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$ ……12 分

19. （I）取 AE 中点 O，连接 OB，

$$\left.\begin{matrix}AD=DE=2\sqrt{2}\\ \angle ADE=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\angle OAB=\frac{\pi}{4}\\ AO=\frac{1}{2}AE=2\end{cases}$$

在 $\triangle OAB$ 中，$AO=2,AB=4\sqrt{2},\angle OAB=\frac{\pi}{4}$ ……2 分

$\Rightarrow OB^2=4+32-2\bullet2\bullet4\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}=20$

在 $Rt\triangle DAE$ 中，$PO=\frac{1}{2}AE=2,PB=2\sqrt{6}$

$\Rightarrow PB^2=OB^2+PO^2\Rightarrow PO\perp OB$ ……3 分

$$\left.\begin{matrix}PA=PE\\ AO=OE\end{matrix}\right\}\Rightarrow PO\perp AE$$ ……4 分

$$\left.\begin{matrix}\Rightarrow PO\perp面ABCE\\ PO\subset面DAE\end{matrix}\right\}\Rightarrow面PAE\perp面ABCE$$ ……6 分

（II）取 AB 中点 M，连 OM

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}AM=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{2}\\ AO=2\\ \angle OAB=\frac{\pi}{4}\end{matrix}\right\}\Rightarrow OM\perp AE\\ PO\perp面ABCE\end{matrix}\right\}\Rightarrow PO,OM,AE两两垂直$$

如图建立空间直角坐标系，$A(0,-2,0),E(0,2,0),M(2,0,0)$，

又 $\because M$ 是 AB 中点，$\therefore B(4,2,0)$

$P(0,0,2),\overline{EC}=\frac{1}{4}\overline{AB}=(1,1,0)$

$\therefore C(1,3,0)$

又 $\because\overline{PF}=\frac{1}{4}\overline{PC}=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},-\frac{1}{2})$

$\therefore F(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2})$ ……8 分

设 $\overline{n_1}=(x,y,z)$ 为平面 ABF 的法向量，则

$\begin{cases}\overline{n_1}\perp\overline{AB}\\ \overline{n_1}\perp\overline{AF}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{n_1}\bullet\overline{AB}=0\\ \overline{n_1}\bullet\overline{AF}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x+4y=0\\ \frac{x}{4}+\frac{11y}{4}+\frac{3z}{2}=0\end{cases}$

令 $y=1,\Rightarrow\overline{n_1}=(-1,1,-\frac{5}{3})$ ……10 分

又 $\because\overline{n_2}=(1,0,0)$ 为平面 PAE 的法向量，

$\therefore\cos<\overline{n_1},\overline{n_2}>=\frac{-1}{\sqrt{1+1+\frac{25}{9}}}=-\frac{3}{\sqrt{43}}$ ……11 分

所以所成锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{\sqrt{43}}$. ……12 分

20. （I）$\because C_1$ 关于 x 轴对称，P_3,P_4 关于 x 轴对称，

$\therefore P_3,P_4$ 在 C_1 上，$\therefore\frac{3}{4b^2}+\frac{1}{a^2}=1$ ……1 分

若 P_1 在 C_1 上，则 $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}>\frac{3}{4b^2}+\frac{1}{a^2}=1$，$\therefore P_1$ 不在 C_1 上，P_2 在 C_1 上，$\therefore a=2$ ……3 分

$\therefore b=1,\therefore C_1:\frac{y^2}{4}+x^2=1$，又 $\because p=\frac{1}{2},\therefore y^2=x$ ……4 分

（II）（i）设 $l:x=my+1$，代入 $y^2=x$ 中，得 $y^2-my-1=0$

$\therefore y_1+y_2=m,y_1y_2=-1$ ……5 分

$\therefore\overline{OA}\cdot\overline{OB}=x_1x_2+y_1y_2=y_1^2y_2^2+y_1y_2=0$ ……7 分

（ii）设直线 $OA:x=m_1y(m_1>0)$

将直线 OA 代入 C_1 中得：$y^2(4m_1^2+1)=4\Rightarrow y_M=\frac{2}{\sqrt{4m_1^2+1}}$

同理得 $y_N=\frac{2|m_1|}{\sqrt{m_1^2+4}}$ ……9 分

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|}{\frac{1}{2}|OM|\cdot|ON|}$

$=\frac{|OA|}{|OM|}\cdot\frac{|OB|}{|ON|}$

$=\frac{|y_1|}{|y_M|}\cdot\frac{|y_2|}{|y_N|}$

$=\frac{|y_1y_2|}{|y_My_N|}$

$=\frac{\sqrt{4m_1^2+1}\cdot\sqrt{m_1^2+4}}{4|m_1|}$ ……10 分

$=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{4m_1^2+\frac{4}{m_1^2}+17}$

$\geq\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\sqrt{16}+17}=\frac{5}{4}$ ……11 分

当且仅当 $m_1^2+\frac{1}{m_1^2}$ 即 $m_1=1$ 时取等. ……12 分

21. （I） $f'(x)=\cos x-\sin x-a$

当 $a=1$ 时， $f'(x)=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-1$ ……1 分

令 $f'(x)>0\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})<-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x\in[-\frac{\pi}{4},0)$

令 $f'(x)<0\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{4})>-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow x\in(0,\frac{\pi}{2}]$

$\therefore f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},0)$ 递增，在 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 递减……4 分

$\therefore f(x)_{max}=f(0)=1$

又 $f(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}$, $f(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)_{min}=f(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}$ ……5 分

（II） $f(-\pi)=-1+a\pi\leq1\Rightarrow a\leq\frac{2}{\pi}$ ……6 分

$f'(x)=-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-a$

$\because-\pi\leq x\leq0$

$\therefore-\frac{5}{4}\pi\leq x-\frac{\pi}{4}\leq-\frac{\pi}{4}$

$\therefore-1\leq\sin(x-\frac{\pi}{4})\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore-\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})\in[-1,\sqrt{2}]$

（i）当 $a\leq-1$ 时， $f'(x)\geq0$

$\therefore f(x)$ 在 $[-\pi,0]$ 递增，

$\therefore f(x)<f(0)=1$ 恒成立. ……8 分

（ii）当 $-1<a\leq\frac{2}{\pi}$ 时，

当 $-\pi\leq x\leq-\frac{\pi}{4}$ 时， $f'(x)$ 单调递增，

当 $-\frac{\pi}{4}\le x\le 0$ 时，$f'(x)$ 单调递减，

$\therefore f'(-\pi)=-1-a<0$

$f'(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-a>0$

$f'(0)=1-a>0$

$\therefore \exists\alpha\in(-\pi,-\frac{\pi}{4})$，使得 $f'(\alpha)=0$. ……10 分

$\therefore$ 当 $-\pi\le x<\alpha$，$f'(x)<0$

当 $\alpha<x\le 0$，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[-\pi,\alpha)$ 单调递减，在 $(\alpha,0]$ 单调递增，

又 $\because f(-\pi)=-1+a\pi\le 1, f(0)=1\le 1$

$\therefore f(x)\le 1, \therefore a\le\frac{2}{\pi}$ ……12 分

22. （I）$\frac{x}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$，$y=-1+\frac{2}{1+t^2}\ne -1$

$\therefore \frac{x^2}{4}+y^2=\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}+\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}=1(y\ne -1)$ ……3 分

$A(2,\frac{\pi}{4}), \therefore B(2,\frac{3\pi}{4}), C(2,\frac{5\pi}{4}), D(2,\frac{7\pi}{4})$

$\therefore A(\sqrt{2},\sqrt{2}), B(-\sqrt{2},\sqrt{2}), C(-\sqrt{2},-\sqrt{2}), D(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ……5 分

（II）设 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$

$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$

$=(2\cos\alpha-\sqrt{2})^2+(\sin\alpha-\sqrt{2})^2+(2\cos\alpha+\sqrt{2})^2+(\sin\alpha-\sqrt{2})^2$

$+(2\cos\alpha+\sqrt{2})^2+(\sin\alpha+\sqrt{2})^2+(2\cos\alpha-\sqrt{2})^2+(\sin\alpha+\sqrt{2})^2$

$=12\cos^2\alpha+4+16$

$=4(3\cos^2\alpha+5)\in[20,32]$ ……10 分

23. （I）$f(x)+f(x-1)=|ax-1|+|ax-(a+1)|\ge|ax-1-[ax-(a+1)]|=|a|=a$

当且仅当 $(ax-1)[ax-(a+1)]\le 0$ 时取"="．

$\therefore a\ge 1, \therefore A=[1,+\infty)$ ……5 分

（II）$x+y+\frac{1}{xy}-(x+y+xy)$

$$=(x-\frac{1}{x})+(y-xy)+(\frac{1}{xy}-\frac{1}{y})$$

$$=\frac{(x-1)(x+1)}{x}+y(1-x)+\frac{1}{xy}(1-x)$$

$$=\frac{(x-1)}{xy}\cdot[(x+1)\cdot y-xy^2-1]$$

$$=\frac{(x-1)}{xy}\cdot[xy\cdot(1-y)+(y-1)]$$

$$=\frac{(x-1)(y-1)(1-xy)}{xy}$$

≤ 0 ……10 分