

腾·云联盟 2022—2023 学年度第一学期高三年级十二月联考

数学试卷

命题学校：红安一中 命题教师：汪胜桥 审题教师：高龙升

考试时间：2022 年 12 月 14 日 试卷满分：150 分

★ 祝考试顺利 ★

注意事项：

1. 答题前，请先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸或答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用 0.5mm 黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸或答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单选题：本大题含 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，每小题仅有一个选项符合题意。

1. 集合 $A = \{x | x^2 - 3x - 18 < 0\}$ ，集合 $B = \{y | y = \ln(x^2 + 1)\}$ ，则 $A \cup B =$
A. $\mathbb{R}$ B. $[0, 6)$ C. $(-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$ D. $(-3, +\infty)$
2. 已知复数 $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ ， $z_2 = \sqrt{3} - i$ ， $z = z_1 z_2$ ，则 z 的共轭复数为
A. $2 - 2\sqrt{3}i$ B. $2 + 2\sqrt{3}i$ C. $2\sqrt{3} - 2i$ D. $2\sqrt{3} + 2i$
3. 已知 $\tan x = \frac{1}{3}$ ，则 $\sin 2x + \cos^2 x =$
A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{7}{10}$ D. $-\frac{1}{2}$
4. 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 4$ ， $BC = CC_1 = 3$ ，则异面直线 AD_1 与 BD 所成角的余弦值为
A. $\frac{16}{25}$ B. $-\frac{16}{25}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$

数学试卷 第 1 页 (共 6 页)

5. 若正数 x, y 满足 $(x+y)\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1$, 则 $x + \frac{1}{y}$ 的最小值为

- A. 4 B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. $\sqrt{2}$

6. 已知 $a = \frac{1}{2022}$, $b = \ln \frac{2023}{2022}$, $c = \log_2 \frac{2023}{2022}$, 则

- A. $c > a > b$ B. $c > b > a$ C. $a > c > b$ D. $a > b > c$

7. 某国军队计划将 5 艘不同的军舰全部投入到甲, 乙, 丙三个海上区域进行军事演习, 要求每个区域至少投入一艘军舰, 且军舰 A 必须安排在甲区域. 在所有可能的安排方案中随机选取一种, 则此时甲区域还有其它军舰的概率为

- A. $\frac{18}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{6}{25}$

8. 设 O 为坐标原点, F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, l_1, l_2 为双

曲线的两条渐近线, F_1A 垂直 l_1 于 A , F_1A 的延长线交 l_2 于 B , 若 $|OA| + |OB| = 2|AB|$,

则双曲线的离心率为

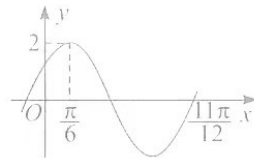
- A. $\sqrt{6}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

二、多选题: 本大题含 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题有多个选项符合要求, 全选对得 5 分, 有漏选的得 2 分, 有错选或不选的得 0 分.

9. 在单位圆 O 中, A, B 是圆上的动点 (可重合), 则下列结论一定成立的有

- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$
B. $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OB}$ 上的投影向量可能为 $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
C. $-1 \leq \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 1$
D. 若 $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$

10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列结论正确的是



A. $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

B. 要想得到 $y = 2 \cos 2x$ 的图象, 只需将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位

C. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbb{Z})$ 上单调递增

D. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[\frac{7\pi}{12}, \pi\right]$ 上的取值范围是 $[-\sqrt{3}, 1]$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x(2x+1)}{x}$, 下列描述不正确的有

A. 函数 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点

B. 函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, 0), \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 减区间为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

C. 若方程 $f(x) = a$ 有两不等实根 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 < -2$

D. 对任意的实数 k, b , 存在实数 x_0 , 当 $x \geq x_0$ 时, $f(x) > e^{kx+b}$

12. 定义集合 $T_n = \{a_n \mid 2^n < a_n < 2^{n+1}, a_n = 3m, m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*\}$, 设 T_n 中所有元素的和为 S_n , 则下列命题正确的有

A. 存在两个不同的 n 使得 T_n 中仅有一个元素

B. T_n 中元素的最大值与最小值之和为 3×2^n

C. S_n 在 $n \in \mathbb{N}^*$ 上不单调

D. 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $1 < \frac{4^n}{S_n} < 3$ 恒成立

三、填空题：本大题含 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在我市今年高二年级期中联合考试中，某校数学单科前 10 名的学生成绩依次是：

143, 140, 144, 142, 142, 145, 148, 147, 147, 150,

这 10 名同学数学成绩的 60% 分位数是_____。

14. 已知抛物线 $x^2 = my$ 的图象过点 $(2, 1)$ ，则该抛物线的焦点到准线的距离为_____。

15. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1-3x) = f(3x)$ ，请写出一个符合条件的函数解析式 $f(x) =$ _____。

16. 球体在工业领域有广泛的应用，某零件由两个球体构成，球 O_1 的半径为 10， P, Q 为球 O_1 表面上两动点， $PQ = 16$ ， M 为线段 PQ 的中点，半径为 2 的球 O_2 在球 O_1 的内壁滚动，点 A, B, C 在球 O_2 表面上，点 O_2 在截面 ABC 上的投影 H 恰为 AC 的中点，若 $O_2H = 1$ ，则三棱锥 $M-ABC$ 体积的最大值是_____。

四、解答题：本大题含 6 小题，共 70 分。解答题应该写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 满足： $2a_n + b_n = 7 \times 2^n$ ， $3a_n - 2b_n = 7n$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式；

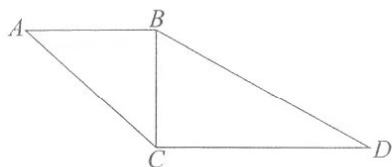
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 S_{10} 。(用具体数值表示)

18. (本题满分 12 分)

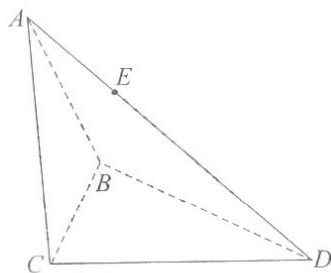
如图①, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = BC = 2$, $CD = 4$, 将图①中左右两个三角形沿着 BC 翻折成为图②所示的三棱锥, 棱 AD 上的点 E 满足 $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AD}$ ($0 < \lambda < 1$).

(1) 过点 E 作截面 $\alpha \parallel$ 平面 BCD , 写出作法并证明;

(2) 当二面角 $A-BC-D$ 的大小为 120° 时, 求直线 AD 与(1)中平面 α 所成角的正切值.



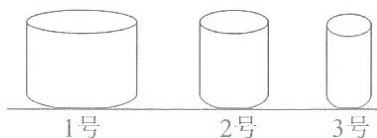
图①



图②

19. (本题满分 12 分)

为贯彻落实党的二十大精神, 促进群众体育全面发展, 奋进中学举行了趣味运动会, 有一个项目是“沙包掷准”, 具体比赛规则是: 选手站在如图(示意图)所示的虚线处, 手持沙包随机地掷向前方的三个箱子中的任意一个, 每名选手掷 5 个大小形状质量相同、编号不同的沙包. 规定: 每次沙包投进 1 号、2 号、3 号



箱分别可得 3 分、4 分、5 分, 没有投中计 0 分. 每名选手将累计得分作为最终成绩.

(1) 已知某位选手获得了 17 分, 求该选手 5 次投掷的沙包进入不同箱子的方法数;

(2) 赛前参赛选手经过一段时间的练习, 选手 A 每次投中 1 号、2 号、3 号箱的概率依次为 0.7, 0.5, 0.3. 已知选手 A 每次赛前已经决定 5 次投掷的目标箱且比赛中途不变更投掷目标. 假设各次投掷结果相互独立, 且投掷时不会出现未中目标箱而误中其它箱的情况.

(i) 若以比赛结束时累计得分作为决策的依据, 你建议选手 A 选择几号箱?

(ii) 假设选手 B 得了 23 分, 请你帮 A 设计一种可能赢 B 的投掷方案, 并计算该方案 A 获胜的概率.

20. (本题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 满足 $\cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 A = 1 - \sin B \sin C$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $BC = \sqrt{3}$, 设 AH 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高, 求 BH 的最大值.

21. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 2, F_1, F_2 分别为左右焦点, 过 F_1 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, $\triangle F_2MN$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 已知结论: 若点 (x_0, y_0) 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上一点, 则椭圆在该点的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. 点 T 为直线 $x = 8$ 上的动点, 过点 T 作椭圆 C 的两条不同切线,

切点分别为 A, B , 直线 AB 交 x 轴于点 Q , 记 $\triangle AF_1Q, \triangle BF_2Q$ 的面积分别为 S_1, S_2 .

切点分别为 A, B , 直线 AB 交 x 轴于点 Q , 记 $\triangle AF_1Q, \triangle BF_2Q$ 的面积分别为 S_1, S_2 .

(i) 证明: Q 为定点;

(ii) 设 $\mu = \frac{S_1}{S_2}$, 求 μ 的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x - 2 \sin x - \ln |x|$. (参考值: $\cos 2 \approx -0.416$)

(1) 证明: $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一的极小值点;

(2) 试研究 $f(x)$ 零点的个数.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线