考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|2^x-4>0\}$，$B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|x>0\}$　　B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\{x|0<x<2\}$　　D. $\{x|x>2\}$

2. 已知 p：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$a<x^2+1$，q：存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得 $a<3-x^2$，则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_m\cdot a_n=2a_{m+n}$，$m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1=1$，则 $\{a_n\}$ 的前 5 项和 $S_5=$

A. $\frac{31}{32}$　　B. $\frac{63}{32}$　　C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{47}{32}$

4. 已知直线 l_1 上有 A,B,C 三个不同的点，且 $2AB=BC=2$，直线 l_2 上有 D,E,F,G,H 五个不同的点，且 $DE=EF=FG=GH=1$，$l_1/\!/l_2$，且 l_1,l_2 间的距离为 1，则由这些点构成的面积为 1 的三角形的个数为

A. 6　　B. 14　　C. 17　　D. 25

5. 已知 $a\sin^2\frac{x}{2}=b-\cos x$，则函数 $f(x)=\sin^a x-\cos^b x$ 的

A. 最小值为 -1，最大值为$\frac{5}{4}$　　B. 最小值为 $-\sqrt{2}$，最大值为$\sqrt{2}$

C. 最小值为 -1，最大值为 1　　D. 最小值为 1，最大值为$\frac{5}{4}$

6. 已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=|3\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影向量的模的最小值为

A. $\frac{4}{7}$　　B. $\frac{6}{7}$　　C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{24}{7}$

段 AD 的中点，则 $|AB|=$

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{7}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=x^3+mx^2+nx+1(m,n\in\mathbf{R})$ 的图象与直线 $y=1$ 相切于非坐标轴上的一点，且 $f(x)_{极小值}=-31$，则 m,n 的值分别是

A. 9，24　　B. 9，36　　C. 12，24　　D. 12，36

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设复数 $z=m+n\mathrm{i}(m,n\in\mathbf{R})$，则下列结论正确的是

A. 若 $m=n\neq0$，则 z^2 是纯虚数

B. 若 $1<m\leqslant2,2\leqslant n\leqslant3$，则 $|z|$ 的最小值为 $\sqrt{5}$

C. 若 $\bar{z}=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则 $mn=1$

D. 若 $m=\frac{1}{2},n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 z^3 在复平面内对应的点的坐标为 $(1,0)$

10. 已知直线 $l:a(2x+3y+2)+b(x-2y-6)=0(ab\neq0)$，则下列结论正确的是

A. 若直线 l 经过原点，则 $a=-3b$

B. 若直线 l 在两坐标轴上的截距之和为 0，且 $a\neq3b$，则 $b=5a$

C. 若直线 l 与圆 $(x-3)^2+y^2=5$ 相切，则 $a=-4b$

D. 若直线 l 是圆 $E:x^2+y^2=16$ 与圆 $F:(x+5)^2+(y-3)^2=c$ 的公共弦所在直线，则 $c=32$

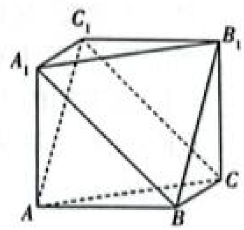
11. 如图，在几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 A_1ACB_1 是矩形，$\triangle ACB\cong\triangle A_1B_1C_1$，且平面 ACB // 平面 $A_1B_1C_1$，$AA_1\perp AB$，$AB=BC=AA_1=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=1$，则下列结论正确的是

A. AC_1 // BB_1

B. 异面直线 BB_1，C_1C 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{2}$

D. 平面 A_1BB_1 与平面 AC_1C 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



12. 猜拳是一种由双方玩家进行竞争性博弈的游戏，最古老的记载可追溯到《诗经》，到现在猜拳也是相当受欢迎的休闲娱乐游戏. 其游戏规则是：双方玩家按照"剪刀""石头""布"出拳，"剪刀"可击败"布"，"石头"可击败"剪刀"，"布"可击败"石头"，若两个玩家出拳完全一样，则双方没有胜负. 下列结论正确的是

A. 若甲、乙两人随机出拳 1 次，则两人没有胜负的概率为 $\frac{1}{3}$

B. 若甲、乙两人随机出拳 6 次，则甲胜乙的次数的数学期望为 3

C. 已知甲出"石头""剪刀""布"的可能性分别为 0.4，0.4，0.2，而乙出"石头""剪刀""布"的可能性相等，则甲胜乙的概率大于乙胜甲的概率

D. 若甲、乙两人随机出拳，出拳 3 次，至少赢两次者为胜，则甲胜乙的概率为 $\frac{7}{27}$

14. 已知$\triangle ABC$的三边长分别为3,4,5,且A,B,C均在球O的球面上,球心O到平面ABC的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,则球O的表面积等于________.

15. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{96}=1(a>4\sqrt{6})$的左、右焦点分别是$F_1,F_2,P$是椭圆$C$上一点,且$|PF_1|:|PF_2|:|OF_2|=8:6:5$($O$为坐标原点),则$|PF_1|-|PF_2|=$________.

16. 已知曲线$y=\ln x$与曲线$y=-3-\frac{1}{x}(x<0)$有公切线l,则l的方程为________.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知平面四边形$ABCD$中,$AB=2\sqrt{3}$,$BC=2-\sqrt{3}$,$CD=3$,$AD=4$,且四边形$ABCD$有外接圆E.

(Ⅰ)求角D的大小;

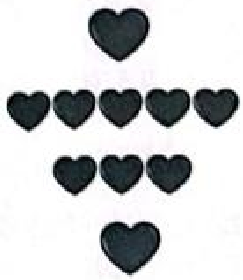
(Ⅱ)求$\tan\angle DAC$的值.

18. (12分)

社会需要爱,时代呼唤爱,传递感动,就是传递"正能量". 如图为某爱心救助网站上的一幅爱心图片,其中有2个大爱心,8个小爱心,现从图片中随机取2个爱心.

(Ⅰ)求取出的2个爱心中,至少有1个大爱心的概率;

(Ⅱ)在取出的2个爱心中,大爱心的个数设为X,求随机变量X的分布列和数学期望.



19. (12分)

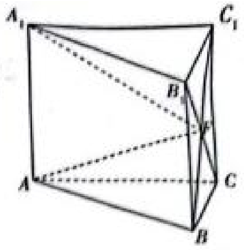
已知数列$\{a_n\}$满足:当n为奇数时,$a_{n+2}-a_n=2$,当n为偶数时,$2a_{n+2}=a_n$.

(Ⅰ)若$a_1=1$,$a_8=a_5$,求a_2;

(Ⅱ)若$a_1=1$,$a_2=64$,$b_n=\frac{1}{64}a_{2n}a_{2n-1}$,求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n$.

(Ⅰ)证明：$\sqrt{3}AB=BB_1$；

(Ⅱ)已知$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HA_1}$，求平面$BCH$与平面$B_1C_1H$的夹角(两平面所成的不大于$90°$的二面角)的余弦值.



21. (12分)

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左顶点为$A$，虚轴上端点为$B$，左、右焦点分别为$F_1,F_2$，离心率为$\frac{5}{3}$，$\triangle ABF_1$的面积为4.

(Ⅰ)求双曲线C的方程；

(Ⅱ)若过F_2且与x轴的夹角在$(0°,45°]$内的直线l交双曲线C于D,E两点，$\triangle F_1DE$的面积为$\frac{480\sqrt{2}}{7}$，求l的方程.

22. (12分)

已知函数$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$，$a\in\mathbf{R}$.

(Ⅰ)若$a=2$，求$f(x)$的单调区间；

(Ⅱ)若$a=1$，x_1,x_2是方程$f(x)=\frac{\ln x+1}{e^x}$的两个实数根，证明：$x_1+x_2>2$.

1. B　2. A　3. C　4. B　5. A　6. C

7. A　8. D

二、多项选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分. 每小题全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. AC　10. BC　11. ABD　12. AD

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. $\frac{1}{4}$　14. 28π

15. 4　16. $x-y-1=0$

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)$\because$ 四边形 $ABCD$ 有外接圆 E,$\therefore D+B=\pi$. ……(1分)

连接 AC,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理可得

$AC^2=(2\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\times(2-\sqrt{3})\cos B=19-4\sqrt{3}+(8\sqrt{3}-12)\cos D$①, ……(2分)

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理可得 $AC^2=4^2+3^2-2\times4\times3\times\cos D=25-24\cos D$②, ……(3分)

由①②可得 $\cos D=\frac{1}{2}$. ……(4分)

$\because D\in(0,\pi)$,$\therefore D=\frac{\pi}{3}$. ……(5分)

(Ⅱ)在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理可得 $\frac{3}{\sin\angle DAC}=\frac{4}{\sin\angle DCA}$,

即 $4\sin\angle DAC=3\sin\angle DCA$. ……(7分)

由(Ⅰ)可知 $D=\frac{\pi}{3}$,

$\therefore 4\sin\angle DAC=3\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\angle DAC\right)=3\sin\frac{2\pi}{3}\cos\angle DAC-3\cos\frac{2\pi}{3}\sin\angle DAC$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\angle DAC+\frac{3}{2}\sin\angle DAC$, ……(9分)

$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\angle DAC=\frac{5}{2}\sin\angle DAC$,

$\therefore \tan\angle DAC=\frac{3\sqrt{3}}{5}$. ……(10分)

18. 解析　(Ⅰ)从图片中随机取2个爱心的取法有 C_{10}^2 种, ……(1分)

设其中至少有1个大爱心的事件为 A,则 $\overline{A}$ 对应的取法有 C_8^2 种, ……(2分)

所以取出的2个爱心中,至少有1个大爱心的概率 $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{17}{45}$. ……(4分)

X	0	1	2
P	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$

…………………………………………………………………………………（10 分）

故 $E(X)=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$. ……………………（12 分）

19. 解析 （Ⅰ）$\because a_8=a_5$，$\therefore a_2\cdot\frac{1}{2^3}=a_1+4$， ……………………（2 分）

$\therefore a_2=8a_1+32=40$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）由题可知 $a_{2n-1}=1+2(n-1)=2n-1$，$a_{2n}=64\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$， ……………………（7 分）

$\therefore b_n=\frac{1}{64}a_{2n}a_{2n-1}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$. ……………………（8 分）

$\therefore S_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$， ……………………（9 分）

两式相减可得 $\frac{1}{2}S_n=1+2\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$

$=1+2\times\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$=3-\frac{2n+3}{2^n}$， ……………………（11 分）

$\therefore S_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$. ……………………（12 分）

20. 解析 （Ⅰ）如图，取 BC，B_1C_1 的中点 E，E_1，则 E，F，E_1 三点共线，连接 EF，E_1F，AE，A_1E_1.

设 $BB_1=2\lambda AB$.

$\because$ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，$EF=\frac{1}{2}BB_1=\lambda AB$. ……………………（2 分）

$\because AE\perp BC$，且平面 $ABC\perp$ 平面 BCC_1B_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $BCC_1B_1=BC$，

$\therefore AE\perp$ 平面 BCC_1B_1，

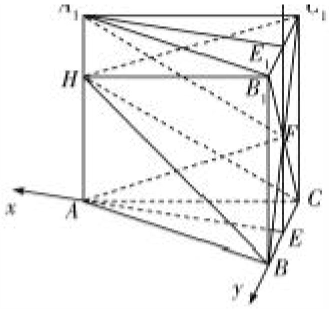
$\therefore AE\perp EF$. 同理，$A_1E_1\perp E_1F$. ……………………（4 分）

$\because A_1F\perp AF$，$\therefore$ 根据对称性知，$\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AE=EF$，

$\therefore \lambda AB=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$，即 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………（5 分）

— 2 —



(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,可以 E 为坐标原点,直线 EA,EB,EE_1 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

不妨设 $AB=2$,则 $BB_1=2\sqrt{3}$,$B(0,1,0)$,$C(0,-1,0)$,$B_1(0,1,2\sqrt{3})$,$C_1(0,-1,2\sqrt{3})$. ………………(7 分)

$\because \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HA_1}$,$\therefore H$ 是 AA_1 的三等分点,且靠近 A_1,

$\therefore H\left(\sqrt{3},0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

$\therefore \overrightarrow{BH}=\left(\sqrt{3},-1,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,$\overrightarrow{BC}=(0,-2,0)$,$\overrightarrow{B_1C_1}=(0,-2,0)$,$\overrightarrow{B_1H}=\left(\sqrt{3},-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ………………(8 分)

设平面 BCH 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BH}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1+\frac{4\sqrt{3}}{3}z_1=0,\\ -2y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=4$,则 $z_1=-3$,$y_1=0$,

$\therefore \boldsymbol{n}=(4,0,-3)$. ………………………………………………(9 分)

设平面 B_1C_1H 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1H}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2-\frac{2\sqrt{3}}{3}z_2=0,\\ -2y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=2$,则 $y_2=0$,$z_2=3$,

$\therefore \boldsymbol{m}=(2,0,3)$. ………………………………………………(10 分)

设平面 BCH 与平面 B_1C_1H 的夹角为 θ,则

$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{|4\times2+0\times0+(-3)\times3|}{5\times\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{65}$,

$\therefore$ 平面 BCH 与平面 B_1C_1H 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{65}$. ………………………………(12 分)

21. **解析** (Ⅰ)$\because S_{\triangle ABF_1}=4$,$\therefore \frac{1}{2}(c-a)b=4$,即$(c-a)b=8$, ………………………(2 分)

又$\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$,$\therefore c=\frac{5}{3}a$. ………………………………………………(3 分)

$\therefore b^2=16$.

$\therefore$ 双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. ……………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $x=my+5$.

联立方程 $\begin{cases}x=my+5,\\16x^2-9y^2-144=0,\end{cases}$ 消去 x，整理得 $(16m^2-9)y^2+160my+256=0$. ……………（6 分）

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\frac{-160m}{16m^2-9}$，$y_1y_2=\frac{256}{16m^2-9}$，

$|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\frac{-160m}{16m^2-9}\right)^2-4\times\frac{256}{16m^2-9}}=96\sqrt{\frac{m^2+1}{(16m^2-9)^2}}$. ……………（8 分）

$\because S_{\triangle F_1ED}=\frac{1}{2}\times10\times|y_2-y_1|=5|y_2-y_1|=\frac{480\sqrt{2}}{7}$，$\therefore |y_2-y_1|=\frac{96\sqrt{2}}{7}$，

$\therefore 96\sqrt{\frac{m^2+1}{(16m^2-9)^2}}=\frac{96\sqrt{2}}{7}$，即 $\sqrt{\frac{m^2+1}{(16m^2-9)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{7}$，

化简得 $512m^4-625m^2+113=0$，解得 $m^2=1$，或 $m^2=\frac{113}{512}$. ……………………………（10 分）

由题可知 $|m|\geqslant1$，

$\therefore m=1$，或 $m=-1$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $x=y+5$，或 $x=-y+5$，即直线 l 的方程为 $x-y-5=0$，或 $x+y-5=0$. …………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

$f'(x)=-\frac{x^2-4x+2}{e^x}$. ……………………………………………………………………（2 分）

令 $h(x)=x^2-4x+2$，

则 $h(x)=0$ 的两根分别为 $x_1=2-\sqrt{2}$，$x_2=2+\sqrt{2}$. ……………………………………………（3 分）

$\therefore$ 在 $(-\infty,2-\sqrt{2})$，$(2+\sqrt{2},+\infty)$ 上 $f'(x)<0$，在 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$ 上 $f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，单调递减区间为 $(-\infty,2-\sqrt{2})$，$(2+\sqrt{2},+\infty)$. …………（5 分）

（Ⅱ）原方程可化为 $\ln x-x^2+x+1=0$，

设 $g(x)=\ln x-x^2+x+1$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}$，$x>0$.

令 $g'(x)=0$，得 $x=1$. ………………………………………………………………………（6 分）

$\because$ 在 $(0,1)$ 上，$g'(x)>0$，在 $(1,+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore g(x)\leqslant g(1)=-1+1+1=1>0$，且当 $x>0$，x 趋向于 0 时，$g(x)$ 趋向于 $-\infty$，

当 x 趋向于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋向于 $-\infty$. ……………………………………………………（7 分）

则 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上分别有一个零点 x_1，x_2，

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，

$\because 0<x_1<1$，$\therefore 2-x_1>1$，

设 $G(x)=g(x)-g(2-x)$，

则 $G(x)=(\ln x-x^2+x+1)-[\ln(2-x)-(2-x)^2+(2-x)+1]=\ln x-\ln(2-x)-2x+2$，

$G'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2=\frac{2x^2-4x+2}{x(2-x)}$. ………………………………………………………………（9 分）

当 $0<x<1$ 时，$G'(x)>0$，

$\therefore G(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

而 $G(1)=0$，$\therefore$ 当 $0<x<1$ 时，$G(x)<0$，$g(x)<g(2-x)$，即 $g(x_1)<g(2-x_1)$. ……………………（11 分）

$\because g(x_2)=g(x_1)$，$\therefore g(x_2)<g(2-x_1)$.

$\because g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore x_2>2-x_1$，即 $x_1+x_2>2$. ………………………………………………………………（12 分）