

# 东北育才学校科学高中部 2022 届高三第一次模拟考试

## 数学学科试卷

一、单选题 (本大题共 8 小题, 共 40 分)

1. 命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - x_0 \leq 0$ ”的否定是 ( )

- A.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - x_0 \leq 0$     B.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x \leq 0$     C.  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 - x_0 > 0$     D.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x > 0$

2. 已知集合  $A = \{x | x < 2\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 2\}$     B.  $\{-1, 0\}$     C.  $\{-2, -1, 0, 2\}$     D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

3. 若  $a, b, c \in \mathbb{R}, a > b$ , 则下列不等式恒成立的是 ( )

- A.  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$     B.  $a^2 > b^2$     C.  $|a| > |b|$     D.  $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$

4. 下列不等式中一定成立的是 ( )

- A.  $\frac{1}{x^2+1} > 1 (x \in \mathbb{R})$     B.  $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geq 2 (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

- C.  $\ln\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) > \ln x (x > 0)$     D.  $x^2 + 1 \geq 2|x| (x \in \mathbb{R})$

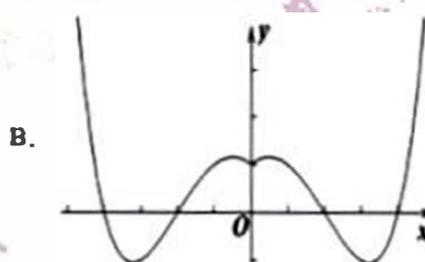
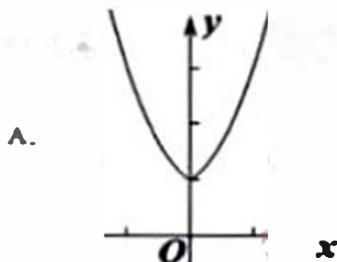
5. 已知  $x > 0, y > 0$ , 且  $2x + 8y - xy = 0$ , 则当  $x + y$  取得最小值时,  $y =$  ( )

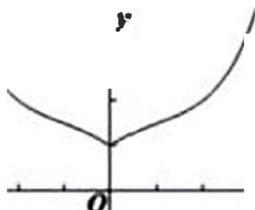
- A. 16    B. 6    C. 18    D. 12

6. 若  $e^x \geq ex^2 + \ln k$  在  $\mathbb{R}$  上恒成立, 则实数  $k$  的取值范围为 ( )

- A.  $k \leq 1$     B.  $0 < k \leq 1$     C.  $k \geq 1$     D.  $1 \leq k \leq e$

7. 已知函数  $f(x) = 2^{|x|} + ax^2, a \in \mathbb{R}$ , 则  $f(x)$  的图象不可能是 ( )





C.

D.



x

8. 定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  满足  $f'(x) < 6f(x)$ , 则必有 ( )

A.  $64f(1) < f(2)$

B.  $81f(1) > 16f(3)$

C.  $4f(2) > f(4)$

D.  $729f(2) > 64f(3)$

二 多选题 (本大题共 4 题, 共 20.0 分)

9. 设函数  $f(x) = a \sin 2x + b \cos 2x$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 则下列说法正确的有 ( )

A. 当  $a=1, b=0$  时,  $f(x)$  为奇函数

B. 当  $a=1, b=-1$  时,  $f(x)$  的一个对称中心为  $(\frac{3\pi}{8}, 0)$

C. 若关于  $x$  的方程  $a \sin 2x + b \cos 2x = m$  的正实根从小到大依次构成一个等差数列, 则这个等差数列的公差为  $\pi$

D. 当  $a=1, b=\sqrt{3}$  时,  $f(\frac{x}{2})$  在区间  $(-2\pi, 2\pi)$  上恰有 4 个零点

10. 给出下面四个推断, 其中正确的为 ( )

A. 若  $a, b \in (0, +\infty)$ , 则  $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$

B. 若  $ab=4$ , 则  $a+b \geq 4$

C. 若  $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ , 则  $\frac{4}{a} + a \geq 4$

D. 若  $a > b > 0$ , 则  $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$

11. 定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $f(x+2) = -f(x)$  且  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  上是增函数,

给出下列真命题的有 ( )

A.  $f(x)$  是周期函数;

B.  $f(x)$  的图象关于直线  $x=2$  对称;

C.  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上是减函数;

D.  $f(2) = f(0)$ .

12. 已知函数  $f(x) = \ln x - ax + 1$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 则下列说法正确的是 ( )

A. 若  $f(x)$  极大值为 0, 则  $a=2$

B. 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增

C.  $a=0$  时,  $f(x) \leq \frac{1}{2}x + 1$  恒成立

D. 若  $a > -1$ , 则  $g(x) = x^2 + 1 - f(x)$  有两个零点

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

13. 所有满足  $\{a\} \subseteq M \subseteq \{a, b, c, d\}$  的集合  $M$  的个数为

14. 设  $p: \ln(2x-1) \leq 0$ ,  $q: (x-a)[x-(a+1)] \leq 0$ , 若  $q$  是  $p$  的必要不充分条件, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 若  $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ , 且  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ,  $\beta \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ , 则  $\alpha + \beta$  的值是\_\_\_\_\_.

16. 已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} + 2k \ln x - kx$ , 若  $x=2$  是函数  $f(x)$  的唯一极值点, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

四、解答题 (本大题共 6 小题, 共 70.0 分)

17. 2021 年某开发区一家汽车生产企业计划引进一批新能源汽车制造设备, 通过市场分析, 全年需投入固定成本 3000 万元, 生产  $x$  (百辆), 需另投入成本  $C(x)$  万元, 且  $C(x) = \begin{cases} 10x^2 + 200x, & 0 < x < 50 \\ 601x - \frac{10000}{x} - 9000, & x \geq 50 \end{cases}$  元.

市场调研知, 每辆车的售价为 6 万元, 且全年内生产的车辆当年能全部销售完.

- (1) 求出 2021 年的利润  $Z(x)$  (万元) 关于年产量  $x$  (百辆) 的函数关系式;
- (2) 2021 年年产量为多少百辆时, 企业所获利润最大? 求出最大利润?

18. 设  $0 < a < 1, t \neq 0$ , 已知函数  $f(x) = \log_a(x+1), g(x) = 2\log_a(2x+t)$ .

- (1) 当  $t = -1$  时, 求不等式  $f(x) \leq g(x)$  的解集;
- (2) 设函数  $F(x) = a^{t+1} + tx^2 - 2t + 1$ , 若方程  $F(x) = 0$  在区间  $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$  上有实数根, 求  $\frac{t}{a}$  的取值范围.

19. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \cos^2 x + m$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为 6.

- (1) 求常数  $m$  的值以及当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时函数  $f(x)$  的最小值.
- (2) 将函数  $f(x)$  的图象向下平移 4 个单位, 再向右平移  $\frac{\pi}{4}$  个单位, 得到函数  $g(x)$  的图象.
  - (i) 求函数  $g(x)$  的解析式;
  - (ii) 若关于  $x$  的不等式  $g^2(x) + 3g(x) - t \geq 0$  在  $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$  时恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

20. 已知函数  $f(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\sin x + (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) + 1$ .

(1) 常数  $\omega > 0$ , 若函数  $y = f(\omega x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  上是增函数, 求  $\omega$  的取值范围;

(2) 若函数  $g(x) = \frac{1}{2}\left[f(2x) - af(x) + af\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - a\right] - 1$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为 2, 求实数  $a$  的值.

21. 已知函数  $f(x) = ax \ln x - \frac{1}{2}x^2 - ax$ .

(1) 若函数  $f(x)$  的图象在  $x = e$  处的切线过点  $(2e, 0)$ , 求实数  $a$  的值;

(2)  $\forall x_1, x_2 \in (1, e)$ ,  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 3$ , 求实数  $a$  的取值范围.

22. 设函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2a \ln x - (a-2)x$ ,  $a \in \mathbf{R}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若方程  $f(x) = c$  ( $c \in \mathbf{R}$ ) 有两个不相等的实数根  $x_1, x_2$ , 求证:  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > 0$ .