2022—2023 高三省级联测考试

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	D	C	B	B	AD	ACD	ACD	BCD

1\. A　**解析**：$\because B=\{x||x|\leqslant 4\}=[-4,4]$，$\therefore A\cap B=\{-1,0,1,2,3,4\}$，故选 A.

[命题意图] 本题考查常用数集、绝对值不等式及交集运算，考查学生的数学运算素养.

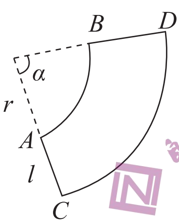
2\. D　**解析**：复数 z 满足 $z=x+y\mathrm{i}$，则 $|x-1+(y+1)\mathrm{i}|=2$，$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=4$，故选 D.

[命题意图] 本题考查知识点为复数的运算、模长的概念，考查了学生的数学运算素养.

3\. C　**解析**：由命题的否定，否结论不否条件，“存在”改为“任意”，“且”改为“或”，故选 C.

[命题意图] 本题考查全称量词命题与存在量词命题的否定，考查学生的逻辑推理素养.

4\. A　**解析**：设圆台上、下底面半径分别为 r_1,r_2，母线长为 l，侧面展开图(扇环)的圆心角为 α，由题意 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=1$，$l=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$，如图，$\overset{\frown}{AB}=\alpha r=2\pi r_1$，① $\overset{\frown}{CD}=\alpha(r+l)=\alpha(r+1)=2\pi r_2$，② 联立①②可得 $r=1$，从而 $\alpha=\pi$，故选 A.



[命题意图] 本题考查圆台的侧面展开图，考查学生的逻辑推理、直观想象素养.

5\. D　**解析**：$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\dfrac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}=2$，得 $\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2\times 2}{1-2^2}=-\dfrac{4}{3}$，故选 D.

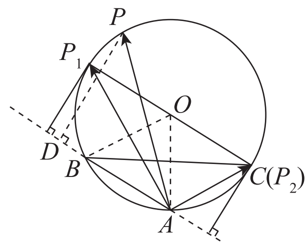
[命题意图] 本题考查了同角三角函数关系和二倍角公式，考查学生的数学运算和逻辑推理等核心素养.

6\. C　**解析**：由题，记样本中女员工的平均体重和标准差分别为 $\bar{x}_1=50$，$s_1=6$，所占权重为 $\omega(\omega>0.5)$，男员工的平均体重和标准差分别为 $\bar{x}_2=70$，$s_2=4$，所占权重为 $1-\omega$. 所以样本中全部员工的平均体重为 $\bar{x}=\omega\bar{x}_1+(1-\omega)\bar{x}_2=70-20\omega$，方差 $s^2=\omega[s_1^2+(\bar{x}-\bar{x}_1)^2]+(1-\omega)[s_2^2+(\bar{x}-\bar{x}_2)^2]=\omega[36+(20-20\omega)^2]+(1-\omega)[16+(-20\omega)^2]=-400\omega^2+420\omega+16=120$，化简得 $100\omega^2-105\omega+26=0$，即 $(20\omega-13)(5\omega-2)=0$，解得 $\omega=0.65$ 或 $\omega=0.4$(舍). 所以女员工的人数为 $\dfrac{21}{1-0.65}\times 0.65=39$，故选 C.

[命题意图] 本题考查了新教材新增内容由两组数据的平均数和方差求解全部数据的平均数和方差，本题从数学学科素养上体现对学生数据分析能力的考查.

7\. B　**解析**：因为 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OP}|$，所以 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 P 为 $\triangle ABC$ 外接圆上一动点，又 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=2$，$A=120^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 外接圆的半径 $r=\dfrac{BC}{\sin 120^\circ}\times\dfrac{1}{2}=2$. 如图，作 $PD\perp AB$，垂足为 D，则 $|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}||\cos\angle PAD|=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|=2|\overrightarrow{AD}|$. 所以，当 PD 与圆相切时，$\overrightarrow{AP}\cdot$

$\overrightarrow{AB}$ 取最值，即 P 在 P_1 处取最大值 6，在 P_2 处取最小值 -2，故选 B.



[命题意图] 本题考查了平面向量数量积的最值求法，结合了圆的有关性质，本题从数学学科素养上体现对学生逻辑推理素养的考查，考查了学生的数形结合能力.

8. B　**解析**：$a-\ln a=e^b-b+1$，令 $f(x)=x-\ln x$，函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，∵ $f(a)=a-\ln a=e^b-b+1>e^b-b=f(e^b)$，又 $a>1$，$e^b>1$，∴ $a>e^b$. 令 $g(x)=e^x-\frac{3}{2}x$，则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，得 $g(3b)>g(b)$，$e^{3b}-\frac{9}{2}b>e^b-\frac{3}{2}b$，则 $e^{3b}-e^b>3b>2b+1$，有 $e^{3b}>e^b+2b+1$，故 $f(e^{3b})=e^{3b}-3b>e^b-b+1=f(a)$，又 $e^{3b}>1$，∴ $e^{3b}>a$，∴ $e^b<a<e^{3b}$，故选 B.

[命题意图] 本题考查函数构建模型比大小问题，要求学生能够运用导数研究简单函数的性质和变化规律，考查学生的逻辑推理、直观想象、数学运算核心素养.

9. AD　**解析**：去掉离群点后成对样本数据的线性相关程度更强，拟合效果会更好，且由表可知，两个变量呈正相关，所以 $r_1<r_2$，$R_1^2<R_2^2$，故选 AD.

[命题意图] 统计是高考的必考内容，本题考查了两个变量间的相关关系、决定系数，本题从数学素养上体现对学生的数据分析、逻辑推理的考查.

10. ACD　**解析**：因为 F_1 关于 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的对称点 Q 恰好在 C 上，则 P,F_2,Q 三点共线，且 $|PF_1|=|PQ|$，又 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $|PF_1|=|F_1Q|=|PQ|$. 设 $|PF_1|=|F_1Q|=|PQ|=m$，$|PF_2|=n$，根据双曲线定义可得 $|PF_1|-|PF_2|=m-n=2a$，$|QF_1|-|QF_2|=m-(m-n)=2a$，解得 $m=4a$，$n=2a$，即 $|PF_2|=|QF_2|=2a$，所以 $PQ\perp F_1F_2$. 在 $\triangle F_1PF_2$ 中，根据勾股定理可得 $16a^2=4a^2+12$，解得 $a=1$，所以 C 的实轴长为 2，所以 A 正确；又 $a=1$，$c=\sqrt{3}$，所以 C 的离心率为 $\sqrt{3}$，所以 B 不正确；$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2=2\sqrt{3}$，所以 C 正确；因为 $PQ\perp F_1F_2$，所以 $P(\sqrt{3},2)$，又 $\angle F_1PF_2$ 的平分线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle F_1PF_2$ 的平分线所在直线的方程为 $y-2=\sqrt{3}(x-\sqrt{3})$，即 $\sqrt{3}x-y-1=0$，所以 D 正确，故选 ACD.

[命题意图] 本题考查双曲线的定义及性质，考查学生推理论证、运算求解和转化化归能力，考查学生逻辑推理、数学运算、直观想象核心素养.

11. ACD　**解析**：设 $g(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$，由 $g(x-4)=g(2-x)$，知函数 $g(x)$ 的图象关于 $x=-1$ 对称，即 $-\frac{b}{2a}=-1$，解得 $b=2a$. 由题意可得 $g(1)\geqslant1$，且 $g(1)\leqslant1$，所以 $g(1)=1$，故 $a+b+c=1$，即 $c=1-3a$，所以 $g(x)=ax^2+2ax+1-3a\,(a\neq0)$. 又 $g(x)\geqslant x$ 恒成立，即 $ax^2+(2a-1)x+1-3a\geqslant0$ 恒成立，于是，$\begin{cases}a>0,\\(2a-1)^2-4a(1-3a)\leqslant0,\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}a>0,\\(4a-1)^2\leqslant0,\end{cases}$ 则 $a=\frac{1}{4}$. 所以，$g(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. 因此，函数 $g(x)$ 的最小值为 0，A 正确；因为函数 $y=f(x)+e^x$ 为奇函数，则 $f(-x)+e^{-x}=-f(x)-e^x$，①又因为函数 $y=f(x)-3e^x$ 为偶函数，则 $f(-x)-3e^{-x}=f(x)-3e^x$，②联立①②可得 $f(x)=e^x-2e^{-x}$，于是，$f(0)=-1$，B 错误；于是，$f'(x)=e^x+2e^{-x}>0$，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 注意到 $g(x)\geqslant0$，从而 $f(g(x))\geqslant f(0)=-1$，C 正确；由基本不等式可得 $e^x+2e^{-x}\geqslant2\sqrt{e^x\cdot2e^{-x}}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $e^x=2e^{-x}$ 时，即当 $x=\frac{1}{2}\ln2$ 时，等号成立，故函数 $f'(x)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，D 正确，故选 ACD.

[命题意图] 本题考查函数单调性、奇偶性的综合运用，考查二次函数与不等式的综合运用，考查学生的逻辑推理能力和数学运算素养.

12. BCD 解析：对于选项 A，如图 1 所示，截面形状为五边形，故 A 错误；对于选项 B，四面体 AA_1FE 的外接球以 EF 为直径，即 $R=\frac{EF}{2}=\sqrt{\frac{3^2+6^2+4^2}{2}}=\frac{\sqrt{61}}{2}$，则表面积 $S=4\pi R^2=61\pi$，故 B 正确；对于选项 C，点 C 到点 F 的最短路径如图 2 所示，$CF=\sqrt{9^2+6^2}=3\sqrt{13}$，故 C 正确；对于选项 D，结合选项 A，记平面 DD_1B_1B 与直线 GF，CE 的交点分别为 M，N，如图 3 所示，则 $\frac{DO}{OB_1}=\frac{DN}{MB_1}=\frac{\frac{3}{4}DB}{\frac{7}{8}D_1B_1}=\frac{6}{7}$，故 D 正确，故选 BCD.

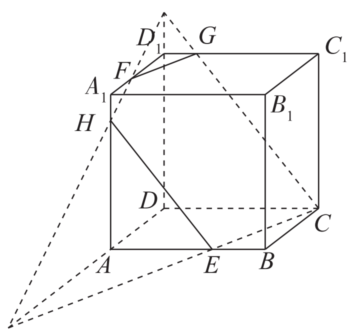


图1

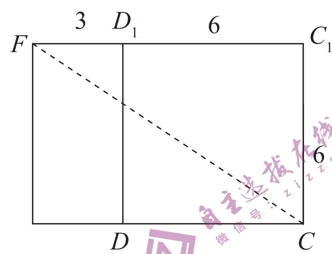


图2

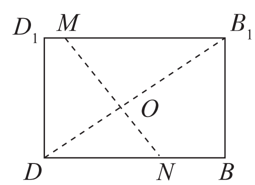


图3

[命题意图] 本题考查了正方体截面及截面交线、几何体的外接球、最短路径问题，本题从数学素养上体现对学生的数学运算、直观想象、数学抽象和逻辑推理的考查，考查了学生数学运算、数形结合、空间想象能力.

13. $\frac{1}{2}$ 解析：当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，由 $x>x-2$，可得 $a^x>a^{x-2}$；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，由 $x>x-2$，可得 $a^x<a^{x-2}$. 因为不等式 $a^x<a^{x-2}$ 对一切实数 x 都成立，所以 $0<a<1$，所以 a 的取值可为 $\frac{1}{2}$（答案不唯一）.

[命题意图] 本题考查利用指数函数的单调性解不等式，考查学生逻辑推理的数学核心素养.

14. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 解析：由题设，$g(x)=\sin(2x-2\varphi)$，其图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，则 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)=0$，则 $\frac{\pi}{3}-2\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，由 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，于是 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$，得函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $g(0)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[命题意图] 本题考查了三角函数的图象和性质，考查数学运算、数形结合和逻辑推理等核心素养.

15. $\sqrt{3}$ 解析：依题意，$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，直线 PF 的斜率为 $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则直线 PF 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2}$，与抛物线 C 联立，$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{p}{2},\\x^2=2py,\end{cases}$ 整理得 $x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-p^2=0$，又 P 在第二象限内，解得 $\begin{cases}x_P=-\frac{\sqrt{3}}{3}p,\\y_P=\frac{p}{6},\end{cases}$ 抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 可写为 $y=\frac{x^2}{2p}$，$y'=\frac{x}{p}$，所以 $y'|_{x=-\frac{\sqrt{3}}{3}p}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}p}{p}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线 MP 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$，切线方程为 $y-\frac{p}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$，即 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{p}{6}$，则点 $M\left(0,-\frac{p}{6}\right)$，$|PF|=\frac{2}{3}p$，$|MF|=\frac{2}{3}p$，

又$\angle PFM=60^\circ$,所以$\triangle MPF$为正三角形,又$|OM|=\dfrac{1}{2}$,所以$p=3$,因此$\triangle MPF$为边长是2的正三角形,则其面积为$\sqrt{3}$.

[命题意图]本题考查抛物线的切线、直线的斜率和三角形面积,考查学生逻辑推理、数学运算核心素养.

16. $\dfrac{1}{6}$ **解析**:由题,设子n代中Aa占比为a_n,则AA占比为$1-a_n$.

所以A∶a$=[2(1-a_n)+a_n]:a_n=(2-a_n):a_n$,则子$(n+1)$代的基因型如下表所示,

雄＼雌	$\dfrac{2-a_n}{2}$A	$\dfrac{a_n}{2}$a
$\dfrac{2-a_n}{2}$A	$\left(\dfrac{2-a_n}{2}\right)^2$AA	$\dfrac{(2-a_n)a_n}{4}$Aa
$\dfrac{a_n}{2}$a	$\dfrac{(2-a_n)a_n}{4}$Aa	×

由表可得,表格中总份数为$\left(\dfrac{2-a_n}{2}\right)^2+2\times\dfrac{(2-a_n)a_n}{4}$(其中淘汰了$\dfrac{a_n^2}{4}$份),因此子$(n+1)$代中Aa占比为

$$\frac{\dfrac{(2-a_n)a_n}{2}}{\left(\dfrac{2-a_n}{2}\right)^2+\dfrac{(2-a_n)a_n}{2}}=a_{n+1}$$,化简得$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$,即$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}$,解得$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}n+1$,$a_n=\dfrac{2}{n+2}$,因此$a_{10}=\dfrac{2}{10+2}=\dfrac{1}{6}$.

[命题意图]本题考查了概率与数列问题的综合,本题从数学素养上体现对学生数学运算、数学建模素养的考查,考查学生的运算求解能力.

17. **解**:(1)设公比为q,由$\dfrac{S_9}{S_6}=\dfrac{73}{9}$,得$S_9-S_6=a_7+a_8+a_9$,

即$\dfrac{a_7+a_8+a_9}{S_6}=\dfrac{(a_1+a_2+a_3)q^6}{(a_1+a_2+a_3)(1+q^3)}=\dfrac{64}{9}$,得$9q^6-64q^3-64=0$,……………………………(3分)

解得$q^3=8$或$q^3=-\dfrac{8}{9}$(舍去),得$q=2$,又$a_1=2$,所以数列$\{a_n\}$是首项为2,公比为2的等比数列,

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^n$.……………………………………………………………(5分)

(2)由b_m为数列$\{a_n\}$在区间$(0,m](m\in\mathbf{N}^*)$中的项的个数,可知$b_1=0$,$b_2=b_3=1$.

$b_4=b_5=b_6=b_7=2$.当$8\leqslant m\leqslant 15$时,$b_m=3$;当$16\leqslant m\leqslant 31$时,$b_m=4$;

当$32\leqslant m\leqslant 63$时,$b_m=5$;当$64\leqslant m\leqslant 100$时,$b_m=6$.……………………………………(8分)

$\therefore b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{100}=0\times1+1\times2+2\times4+3\times8+4\times16+5\times32+6\times37=480$.

$\therefore$数列$\{b_m\}$前100项的和为480.……………………………………………………………(10分)

[命题意图]本题考查了等比数列的通项公式和并项求和,考查学生的数学运算和逻辑推理等核心素养.

18. **解**:(1)已知$2\sin C=\sin B$,由正弦定理,得$2c=b$,由$\cos A=\dfrac{4}{bc}$,得$c^2\cos A=2$,………………(1分)

由$\triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times2c\times c\sin A=2\sqrt{3}$,得$c^2\sin A=2\sqrt{3}$,

相除得$\tan A=\sqrt{3}$,又$0<A<\pi$,故$A=\dfrac{\pi}{3}$,……………………………………………………(2分)

由$\cos A=\dfrac{1}{2}$,$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,得$c=2$,$b=4$,由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,即$a^2=12$,……(4分)

在$\triangle ABC$中,$AC=4$,$AB=2$,$BC=2\sqrt{3}$,满足$AC^2=AB^2+BC^2$,

所以$\triangle ABC$为直角三角形,$\angle ABC=90^\circ$.……………………………………………………(5分)

在$\mathrm{Rt}\triangle ABM$中,$BM=\dfrac{1}{2}BC=\sqrt{3}$,$AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{7}$,

所以 $\cos\angle BMA=\dfrac{BM}{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. …………………………………………………………………………（7 分）

(2)在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，BN 为 AC 边上的中线，所以 $BN=\dfrac{1}{2}AC=2$， ……………………………………（9 分）

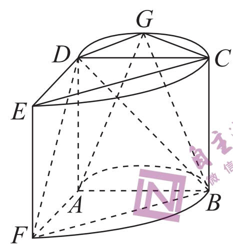
由 AM，BN 分别为边 BC，AC 上的中线可知 P 为$\triangle ABC$ 的重心，

可得 $NP=\dfrac{1}{3}BN=\dfrac{2}{3}$，$MP=\dfrac{1}{3}AM=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$， ……………………………………………………（11 分）

所以 $MP^2+NP^2=\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{11}{9}$. ………………………………………………………（12 分）

[命题意图] 本题考查了正余弦定理的应用和三角形重心的性质，考查学生数学运算能力、数形结合思想和逻辑推理等核心素养.

19. **解：**(1)证明：如图，连接 CE，DG，因为该几何体是由等高的半个圆柱和$\dfrac{1}{4}$个圆柱拼接而成，



$CG=DG$，所以$\angle ECD=\angle DCG=45°$，所以$\angle ECG=90°$，所以 $CE\perp CG$. ……………………………（1 分）

因为 $BC/\!/EF$，$BC=EF$，所以四边形 $BCEF$ 为平行四边形，所以 $BF/\!/CE$，所以 $BF\perp CG$. ……（2 分）

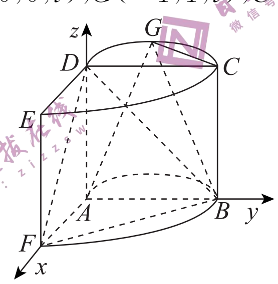
因为 $BC\perp$平面 ABF，$BF\subset$平面 ABF，所以 $BC\perp BF$. …………………………………………（3 分）

因为 BC，$CG\subset$平面 BCG，$BC\cap CG=C$，所以 $BF\perp$平面 BCG，…………………………………（4 分）

因为 $BF\subset$平面 BFD，所以平面 $BFD\perp$平面 BCG. …………………………………………………（5 分）

(2)如图，以 A 为坐标原点建立空间直角坐标系，设 $AF=2$，$AD=t$，

则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$F(2,0,0)$，$D(0,0,t)$，$G(-1,1,t)$，$C(0,2,t)$，



则 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AG}=(-1,1,t)$，$\overrightarrow{GC}=(1,1,0)$，

设平面 ABG 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y=0,\\ -x+y+tz=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，则 $\boldsymbol{m}=(t,0,1)$，

记直线 GC 与平面 ABG 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{GC},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{GC}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{GC}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|t|}{\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

解得 $t=2$(负值舍去)，即 $AD=2$. ………………………………………………………………………（8 分）

设平面 BFD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，$\overrightarrow{FB}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{FD}=(-2,0,2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x'+2y'=0,\\ -2x'+2z'=0,\end{cases}$ 令 $x'=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，……………………………（10 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

因此平面 BFD 与平面 ABG 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………………………………（12 分）

[命题意图] 本题考查了证明面面垂直、线面角及面面角的求解，从数学素养上体现对学生数学运算、逻辑推理、几何直观的考查，考查学生的运算求解、推理论证、空间想象能力.

20. **解：**(1)由题可知，甲、乙、丙各旁观 1 局的概率即为甲、乙、丙各胜 1 局的概率.

设甲、乙比赛甲胜，乙、丙比赛乙胜，丙、甲比赛丙胜分别为事件 A,B,C，则 A,B,C 相互独立，

设比赛完 3 局时，甲、乙、丙各胜 1 局为事件 M，则 $M=AC\cup\overline{A}\overline{B}$，………………………………（2 分）

则 $P(M)=P(AC)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)P(C)+P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，

所以甲、乙、丙各旁观 1 局的概率为 $\frac{2}{3}$. ………………………………………………………（4 分）

(2)设甲、乙、丙第 i 局比赛获胜分别为事件 A_i,B_i,C_i，$i=1,2,3,4,5$，

设比赛完 5 局甲获得最终胜利为事件 D，则 $D=B_1B_2A_3A_4A_5+B_1C_2A_3A_4A_5+A_1A_2B_3B_4A_5+A_1A_2B_3C_4A_5+A_1C_2C_3A_4A_5+A_1C_2B_3A_4A_5$，………………………………………（7 分）

$P(B_1B_2A_3A_4A_5)=P(B_1)P(B_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$，

$P(B_1C_2A_3A_4A_5)=P(B_1)P(C_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$，

$P(A_1A_2B_3B_4A_5)=P(A_1)P(A_2)P(B_3)P(B_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$，

$P(A_1A_2B_3C_4A_5)=P(A_1)P(A_2)P(B_3)P(C_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$，

$P(A_1C_2C_3A_4A_5)=P(A_1)P(C_2)P(C_3)P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{27}$，

$P(A_1C_2B_3A_4A_5)=P(A_1)P(C_2)P(B_3)P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$，…………（10 分）

所以 $P(D)=\frac{1}{72}+\frac{1}{54}+\frac{1}{72}+\frac{1}{54}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}=\frac{13}{108}$，

所以，已知比赛进行 5 局后结束，甲获得最终胜利的概率为 $\frac{13}{108}$. ……………………………（12 分）

[命题意图] 概率统计是高考必考内容，本题考查了相互独立事件的概率、分步分类计数原理，本题从数学素养上体现对学生数学运算、逻辑推理素养的考查，考查学生的运算求解能力.

21. **解：**(1)依题意，$|QN|=|QP|$，$|MQ|+|QP|=|MP|=4$，所以 $|NQ|+|QM|=4$，

所以动点 Q 的轨迹是以 M,N 为焦点，长轴长为 4 的椭圆，……………………………………（3 分）

所以动点 Q 的轨迹 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………（4 分）

(2)直线 l 的方程为 $y=kx+1\left(\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant 2\right)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 消去 y 并整理，

得 $(2k^2+1)x^2+4kx-2=0$，显然 $\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=-\frac{2}{2k^2+1}$，……………………………（5 分）

又 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\frac{2}{2k^2+1}$，可得线段 AB 的中点坐标为 $\left(-\frac{2k}{2k^2+1},\frac{1}{2k^2+1}\right)$，………（6 分）

所以线段 AB 垂直平分线的方程为 $y-\frac{1}{2k^2+1}=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{2k}{2k^2+1}\right)$，令 $y=0$，可得 $E\left(-\frac{k}{2k^2+1},0\right)$，

对于直线 $y=kx+1$，令 $y=0$，可得 $D\left(-\frac{1}{k},0\right)$，………………………………………（8 分）

所以 $|DE|=\left|-\frac{k}{2k^2+1}-\left(-\frac{1}{k}\right)\right|=\frac{k^2+1}{k(2k^2+1)}$.

又 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(-\frac{4k}{2k^2+1}\right)^2+\frac{8}{2k^2+1}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}}{2k^2+1}\sqrt{8k^2+2}$,

所以 $\mu=\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{2k\sqrt{8k^2+2}}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{8(k^2+1)+\frac{6}{k^2+1}-14}$, ……………………………………………… (9 分)

令 $t=k^2+1\in\left[\frac{5}{4},5\right]$,则 $y=8(k^2+1)+\frac{6}{k^2+1}-14=8t+\frac{6}{t}-14$,

因为 $y=8t+\frac{6}{t}-14$ 在 $\left[\frac{5}{4},5\right]$ 上单调递增,所以 $y\in\left[\frac{4}{5},\frac{136}{5}\right]$,则 $\mu\in\left[\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{4\sqrt{170}}{5}\right]$. ……… (12 分)

[命题意图] 本题考查椭圆的定义、直线与椭圆的位置关系、弦长问题,考查学生推理论证能力、运算求解能力和创新意识,考查学生的逻辑推理、数学运算核心素养.

22. **解:**(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=-\frac{1}{x}+a=\frac{ax-1}{x}$, ………………………………… (1 分)

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,
注意到 $f(1)=a-2<0$,所以 $f(x)\geqslant 0$ 不可能恒成立; ………………………………………………… (2 分)

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=\frac{ax-1}{x}=0$,解得 $x=\frac{1}{a}$,当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最小值 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln a-1$, ………………………………………………… (3 分)

于是 $\ln a-1\geqslant 0$,解得 $a\in[\mathrm{e},+\infty)$,故实数 a 的取值范围是 $[\mathrm{e},+\infty)$. ………………………………… (4 分)

(2)证明:令 $a=1$,$f(x)=x-\ln x-2$,$f'(x)=1-\frac{1}{x}$,

当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=-1$,所以 $f(x)=x-\ln x-2\geqslant -1$,即 $x-\ln x-1\geqslant 0$,即 $\ln x\leqslant x-1$,当且仅当 $x=1$ 时,等号成立. 于是 $\ln(x+1)\leqslant x$,当且仅当 $x=0$ 时,等号成立. ……………………………………………………………………………………… (6 分)

故 $x>0$ 时,$\ln(x+1)<x$,令 $x=\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k(k+1)}$,$k\in\mathbf{N}^*$,

则 $\ln\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)<\frac{1}{k(k+1)}$,$k\in\mathbf{N}^*$, ……………………………………………………… (8 分)

$\ln\left(1+\frac{1}{1\times 2}\right)<\frac{1}{1\times 2}$,$\ln\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)<\frac{1}{2\times 3}$,…,$\ln\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)<\frac{1}{k(k+1)}$,

以上各式相加可得,

$\ln\left(1+\frac{1}{1\times 2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2\times 3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{k(k+1)}\right)<\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}<1$, ……………………………………………… (10 分)

即 $\ln\left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2+2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{k^2+k}\right)<1$,

所以 $\left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2+2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2+3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^2+k}\right)<\mathrm{e}$. ……………………………………… (12 分)

[命题意图] 本题考查导数应用以及裂项求和与放缩,考查学生数学建模、逻辑推理、数学运算核心素养.