决胜新高考——2023届高三年级大联考

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项： 1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上．将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案．答案不能答在试卷上．

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液．不按以上要求作答无效．

4．考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-3\le 0\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{0,1,2,3,4\}$　　B．$\{0,1,2,3\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{0,1\}$

2．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则 $\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角是（　　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{2}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

3．已知复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})=7+\mathrm{i}$，则 $|\overline{z}|=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{3}$　　D．5

4．中国国家大剧院是亚洲最大的剧院综合体，中国国家表演艺术的最高殿堂，中外文化交流的最大平台．大剧院的平面投影是椭圆 C，其长轴长度约为 212m，短轴长度约为 144m．若直线 l 平行于长轴且 C 的中心到 l 的距离是 24m，则 l 被 C 截得的线段长度约为（　　）

A．140m　　B．143m　　C．200m　　D．209m

5．已知多项式 $(x+2)^3(x-1)^4=a_1(x+1)^7+a_2(x+1)^6+\cdots+a_7(x+1)+a_8$，则 $a_7+a_8=$（　　）

A．0　　B．32　　C．16　　D．-16

6．对于命题“若 $x\perp z$，$y\perp z$，则 $x\,/\!/\,y$”，要使得该命题是真命题，x，y，z 可以是（　　）

A．x，y，z 是空间中三个不同的平面

B．x，y，z 是空间中三条不同的直线

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

C．x，z 是空间中两条不同的直线，y 是空间的平面

D．x，y 是空间中两条不同的直线，z 是空间的平面

7．在$\triangle ABC$中，内角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，且$c=2$，$b\cos A=3$，则$\tan C$的最大值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{3}$

8．若$a=\frac{2}{7}\left(e^{\frac{2}{7}}-e^{-\frac{2}{7}}\right)$，$b=\frac{7}{12}\ln\frac{4}{3}$，$c=-\frac{5}{6}\ln\frac{2}{3}$，则（　　）

A．$c>b>a$　　B．$a>b>c$　　C．$b>a>c$　　D．$a>c>b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．有两组样本数据 1，3，5，7，9 和 1，2，5，8，9，则这两组样本数据的（　　）

A．样本平均数相同　　B．样本中位数相同　　C．样本方差相同　　D．样本极差相同

10．若函数$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，且$x_1<x_2$，则（　　）

A．$(x_1-x_2)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)>0$　　B．$x_1-f(x_1)>x_2-f(x_2)$

C．$f(x_1)-x_2<f(x_2)-x_1$　　D．$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

11．已知点P在圆O：$x^2+y^2=2$上，点$A(2\sqrt{2},0)$，$B(0,2\sqrt{2})$，则（　　）

A．点P到直线AB的距离的最小值是$2-\sqrt{2}$　　B．$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是$[6-4\sqrt{2},6+4\sqrt{2}]$

C．$\angle BAP$的取值范围是$\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$　　D．当$\triangle APB$为直角三角形时，其面积为 3

12．佩尔数列是一个呈指数增长的整数数列．随着项数越来越大，其后一项与前一项的比值越来越接近于一个常数，该常数称为白银比．白银比和三角平方数、佩尔数及正八边形都有关系．记佩尔数列为$\{a_n\}$，且$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$．则（　　）

A．$a_{10}=985$　　B．数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列

C．$a_n=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(-\sqrt{2}+1)^{n-1}\right]$　　D．白银比为$\sqrt{2}+1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．若数列$\{a_n\}$是等比数列，且$2a_2$是$4a_1$与a_3的等差中项，则$\frac{a_2+a_3}{a_2+a_1}=$________．

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

14．某校有 4 名同学到三个社区参加新时代文明实践宣传活动，要求每名同学只去 1 个社区，每个社区至少安排 1 名同学，则甲、乙 2 人被分配到同一个社区的概率________.

15．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-x,x\le 0\\ \ln x,x>0\end{cases}$ 若 $F(x)=f(f(x)-t)$ 有六零点，则实数 t 的取值范围是________.

16．在棱长位 6 的正四面体 $ABCD$ 中，已知点 O 为该四面体的外接球的球心，则以 O 为球心，$\frac{\sqrt{30}}{2}$ 为半径的球面与该四面体的表面形成的交线长为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数}\\ a_n+2, & n\text{为偶数}\end{cases}$

（1）记 $b_n=a_{2n}$，写出 b_1，b_2，并求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）求 $\{a_n\}$ 的前 20 项和．

18．（12 分）在① $a\cos\frac{A+C}{2}=b\sin A$，② $\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=0$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并完成解答．

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，且满足________.

（1）求 B；

（2）若 $b=7$，$c=3$，D 为 AC 边上的一点，且 $\angle DBC=\angle DCB$，求 BD．

19．（12 分）如图 1，在边长为 4 的等边 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AC，AB 的中点．将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折至 $\triangle PDE$（如图 2），使得 $PB=\sqrt{10}$．

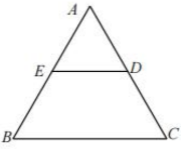


图 1

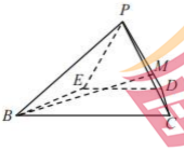


图 2

（1）证明：平面 $PDE\perp$ 平面 $BCDE$；

（2）若点 M 在棱 PD 上，当 MB 与平面 PDE 所成角最大时，求 MB 的长．

20．（12 分）甲乙两位同学进行乒乓球单打比赛，约定：①每赢一球得 1 分；②采用两球换发制，即每比赛二球交换发球权．假设甲发球时甲得分的概率是 $\frac{1}{2}$，乙发球时甲得分的概率是 $\frac{2}{5}$，各球的结果相互独立．根据抽签结果决定，甲先发球．

（1）求比赛二球后甲得分的期望；

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

江苏学生圈
微信号:jsgkxsq

（2）求比赛六球后甲得分比乙得分多 2 分的概率.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=\cos x+\dfrac{x^2}{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的最小值；

（2）证明：$\mathrm{e}^x-\cos x \geq -\dfrac{x^4}{24}+x^2+x(x \geq 0)$.

22.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A，B 两点在椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，且直线 AB 与椭圆 C_2：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 有且仅有一个交点 P，射线 OP 与椭圆 C_1 交于点 Q .

（1）证明：四边形 $OAQB$ 是平行四边形；

（2）求四边形 $OAQB$ 的面积.

决胜新高考——2023 届高三年级大联考

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1.【答案】B

【解析】因为 $B=[-1,3]$，所以 $A \cap B=\{0,1,2,3\}$.

2.【答案】A

【解析】结合向量加法的平行四边形法则可得.

3.【答案】D

【解析】$|\overline{z}|=|z|=\dfrac{|7+\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}|}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$.

4.【答案】C

【解析】由 $\dfrac{x^2}{106^2}+\dfrac{y^2}{72^2}=1$ 和 $y=24$ 得 $|2x|=\dfrac{424\sqrt{2}}{3}$.

5.【答案】B

【解析】设 $t=x+1$，则 $(t+1)^3(t-2)^4=a_1t^7+a_2t^6+\cdots+a_7t+a_8$.

令 $t=0$，则 $(0+1)^3(0-2)^4=16=a_8$.

$(t+1)^3$ 的展开式中一次项为 $C_3^2t=3t$，常数项为 1，

$(t-2)^4$ 的展开式中一次项为 $C_4^3(-2)^3t=-32t$，常数项为 16，

所以 $a_7=3\times16-32=16$.

6.【答案】D

【解析】逐个代入检验即可.

7.【答案】D

【解析】过点 C 作 AB 的垂线，垂足为 H ，则 $b\cos A=AH=3$.

设 $CH=h$ ，则 $\tan\angle ACH=\dfrac{3}{h}$， $\tan\angle BCH=\dfrac{1}{h}$，

所以 $\tan\angle ACB=\tan(\angle ACH-\angle BCH)=\dfrac{\dfrac{3}{h}-\dfrac{1}{h}}{1+\dfrac{3}{h}\times\dfrac{1}{h}}=\dfrac{2}{h+\dfrac{3}{h}}\le\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $h=\sqrt{3}$ 时等号成立.

8.【答案】A

【解析】设 $f(x)=x\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)$，则 $a=f\left(\dfrac{2}{7}\right)$， $b=f\left(\ln\dfrac{4}{3}\right)$， $c=f\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)$.

因为 $f(-x)=-x\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}\right)=f(x)$,

所以 $c=f\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)=f\left(-\ln\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right)$.

当 $x>0$ 时，因为 $f'(x)=\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)+x\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $\ln\dfrac{4}{3}<\ln\dfrac{3}{2}$，所以 $c>b$.

因为 $\dfrac{4-3}{\ln4-\ln3}<\dfrac{4+3}{2}$，所以 $\ln4-\ln3>\dfrac{2}{7}$，所以 $b>a$.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9.【答案】ABD

【解析】结合定义可得.

10.【答案】AC

【解析】因为 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ 单调递增，所以 $\left(x_1-x_2\right)\left(f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right)>0$.

因为 $y=f(x)+x=x^{\frac{1}{3}}+x$ 单调递增，所以 C 正确.

因为 $0-f(0)=1-f(1)=0$，所以 B 错误.

因为 $\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}=f(0)$，所以 D 错误.

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

11.【答案】ACD

【解析】因为圆心O到直线AB：$x+y-2\sqrt{2}=0$的距离是$d_O=\dfrac{|-2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$，

所以点P到直线AB的距离的最小值是$2-\sqrt{2}$.

记线段AB的中点为M，

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{MA})=\overrightarrow{PM}^2-\overrightarrow{MA}^2$.

因为$2-\sqrt{2}\le|\overrightarrow{PM}|\le 2+\sqrt{2}$，

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是$[2-4\sqrt{2},2+4\sqrt{2}]$.

当AP到圆O相切时，$\angle PAO=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$\angle BAP$的取值范围是$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$.

因为$\angle BAP$的取值范围是$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$，

所以当$\triangle APB$为直角三角形时，$\angle BPA=\dfrac{\pi}{2}$，

由$\begin{cases}x^2+y^2=2\\(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2=4\end{cases}$，得$x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$，

所以$d_P=\dfrac{\left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{2}$.

所以其面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times 4=3$.

12.【答案】ACD

【解析】因为$a_3=2$，$a_4=5$，$a_5=12$，$a_6=29$，$a_7=70$，$a_8=169$，$a_9=408$，$a_{10}=985$，所以A正确.

因为$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=1$，$a_4-a_3=3$，所以B错误.

设数列$\{a_{n+1}+ka_n\}$是公比为q是等比数列，则$a_{n+2}+ka_{n+1}=q(a_{n+1}+ka_n)$，

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

所以 $a_{n+2}=(q-k)a_{n+1}+qka_n$，所以 $q-k=2$，$qk=1$，

所以 $\begin{cases}k=-1+\sqrt{2}\\q=1+\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-1-\sqrt{2}\\q=1-\sqrt{2}\end{cases}$

当 $\begin{cases}k=-1+\sqrt{2}\\q=1+\sqrt{2}\end{cases}$ 时，$a_{n+1}+(-1+\sqrt{2})a_n=1\times(1+\sqrt{2})^{n-1}$，

当 $\begin{cases}k=-1-\sqrt{2}\\q=1-\sqrt{2}\end{cases}$ 时，$a_{n+1}+(-1-\sqrt{2})a_n=1\times(1-\sqrt{2})^{n-1}$，

解得 $a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left[(\sqrt{2}+1)^{n-1}-(-\sqrt{2}+1)^{n-1}\right]$，所以 C 正确．

因为 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{n+1}-(-\sqrt{2}+1)^{n+1}}{(\sqrt{2}+1)^{n}-(-\sqrt{2}+1)^{n}}=(-\sqrt{2}+1)\left[1-\dfrac{2\sqrt{2}+4}{1-(2\sqrt{2}-3)^n}\right]$，

所以当 $n\to+\infty$ 时，$(2\sqrt{2}-3)^n\to0$，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\to\sqrt{2}+1$．

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13.【答案】2

【解析】因为 $4a_2=4a_1+a_3\Rightarrow4q=4+q^2\Rightarrow q=2$，所以 $\dfrac{a_2+a_3}{a_2+a_1}=2$．

14.【答案】$\dfrac{1}{6}$

【解析】$P=\dfrac{A_3^3}{C_4^2A_3^3}=\dfrac{1}{6}$．

15.【答案】$0\le t<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $t<-1$

【解析】因为 $F(x)=f(f(x)-t)=0$，所以 $f(x)-t=0$ 或 $f(x)-t=1$ 或 $f(x)-t=-1$．
因为 $F(x)=f(f(x)-t)$ 有六个零点，所以函数 $f(x)$ 的图象与三条直线共有六个交点．因为函数 $y=\ln x$ 的图象与三条直线共有三个交点，

所以 $f(x)=x^3-x(x\le0)$ 的图象与三条直线共有三个交点，

所以 $0\le t<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $t+1<0$，所以 $0\le t<\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ 或 $t<-1$．

江苏学生圈 —微信号:jsgkxsq—

16.【答案】$2\sqrt{6}\pi$

【解析】取 CD 的中点 M，$\triangle BCD$ 的中心 O_1，

则 $AM = BM = 3\sqrt{3}$，$BO_1 = 2\sqrt{3}$，$AO_1 = 2\sqrt{6}$.

因为 $OB^2 = OO_1^2 + BO_1^2 = \left(AO_1 - AO\right)^2 + BO_1^2 = \left(AO_1 - BO\right)^2 + BO_1^2$，

所以 $AO = \frac{3}{2}\sqrt{6}$，$OO_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

设球面与平面 BCD 形成的交线上一点 P，

则 $OP^2 = OO_1^2 + PO_1^2$，所以 $PO_1 = \sqrt{6}$.

所以球面与平面 BCD 形成的交线是三段圆心角为 $30°$ 的圆弧，

所以结合对称性可知交线长度为 $2\sqrt{6}\pi$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．解：（1）$b_1 = a_2 = a_1 = 1$，$a_3 = a_2 + 2 = 3$，$b_2 = a_4 = a_3 = 3$.

因为 $a_{2n+2} = a_{2n+1+1} = a_{2n+1} = a_{2n} + 2$，所以 $b_{n+1} = b_n + 2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，所以 $b_n = 2n - 1$.

（2）因为当 n 为奇数时，$a_{n+1} = a_n$，

所以 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20} = 2a_2 + 2a_4 + \cdots + 2a_{20} = 2\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_{10}\right)$$

$$= 2\times\frac{(1+19)\times 10}{2} = 200 .$$

18．解：（1）选择①．

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$.

因为 $a\cos\frac{A+C}{2} = b\sin A$，所以 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos\frac{A+C}{2}}$，所以 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin A}{\cos\frac{A+C}{2}}$.

因为 $\sin A \neq 0$，所以 $\sin B = \cos\frac{A+C}{2}$.

因为 $A + B + C = \pi$，所以 $\sin B = \cos\frac{\pi - B}{2} = \sin\frac{B}{2}$，

所以 $\sin B = 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} = \sin\frac{B}{2}$，因为 $\sin\frac{B}{2} \neq 0$，所以 $\cos\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$.

江苏学生圈 微信号：jsgkxsq

因为$0<B<\pi$，所以$0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$，所以$\frac{B}{2}=\frac{\pi}{3}$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$.

选择②.

因为$\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=0$，

所以$\frac{2\sin B\cos B}{1+2\cos^2 B-1}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{1-\cos B}{\sin B}=0$，

所以$\sin^2 B+\cos B(1-\cos B)=0$，

所以$1-\cos^2 B+\cos B-\cos^2 B=0$，即$2\cos^2 B-\cos B-1=0$，

解得$\cos B=-\frac{1}{2}$或$\cos B=1$（舍去），

因为$0<B<\pi$，所以$B=\frac{2\pi}{3}$.

（2）在$\triangle ABC$中，由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得$7^2=3^2+a^2-2\times 3a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，解得$a=5$.

在$\triangle ABC$中，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{5^2+7^2-3^2}{2\times 5\times 7}=\frac{13}{14}$.

在$\triangle DBC$中，由正弦定理$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

得$BD=\frac{BC\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}=\frac{5\sin\angle BCD}{\sin\angle BDC}$.

因为$\angle DBC=\angle DCB$，

所以$\sin\angle BDC=\sin(\pi-\angle DBC-\angle DCB)=\sin(\pi-2\angle DCB)=\sin(2\angle DCB)$，

所$BD=\frac{5\sin\angle BCD}{\sin 2\angle BCD}=\frac{5\sin\angle BCD}{2\sin\angle BCD\cos\angle BCD}=\frac{5}{2\cos\angle BCD}=\frac{35}{13}$.

19.【解】（1）取DE的中点O，因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以$AO\perp DE$.

因为$\triangle ABC$的边长为4，

所以$AO=PO=\sqrt{3}$.

在$\triangle BOE$中，$BE=2$，$EO=1$，$\angle BEO=\frac{2\pi}{3}$，

由余弦定理$BO^2=BE^2+EO^2-2BE\times EO\cos\angle BEO$，

得$BO^2=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$.

因为$PB^2=BO^2+PO^2$，所以$PO\perp OB$.

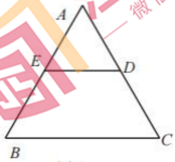
又因为$DE\cap OB=O$，DE，$OB\subset$平面$BCDE$，

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

所以 $PO\perp$ 平面 $BCDE$．

因为 $PO\subset$ 平面 PDE，

所以平面 $PDE\perp$ 平面 $BCDE$．



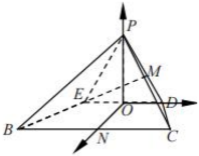


图 1　　　　　　　　　　　　　　　　图 2

（2）（方法 1）取 BC 的中点 N，则 $ON\perp DE$．

以 O 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $B(\sqrt{3},-2,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,1,0)$．

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PD}$，因为 $\overrightarrow{PD}=(0,1,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{PM}=(0,\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(-\sqrt{3},\lambda+2,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$．

因为 $PO\perp$ 平面 $BCDE$，$ON\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $ON\perp PO$．

又因为 $ON\perp DE$，所以 $ON\perp$ 平面 PDE，

所以平面 ABP 的一个法向量为 $\overrightarrow{ON}=(\sqrt{3},0,0)$．

记 MB 与平面 PDE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{BM}}{|\overrightarrow{ON}||\overrightarrow{BM}|}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{3}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(\lambda+2)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\lambda^2-2\lambda+10}}$．

因为当 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时，$\sin\theta$ 取得最大值，此时 θ 最大，

所以 $\overrightarrow{BM}=\left(-\sqrt{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$，所以 $|\overrightarrow{BM}|=\dfrac{\sqrt{39}}{2}$．

（方法 2）在平面 $BCDE$ 内，过点 B 向 DE 作垂线，垂足为 H．

因为 $PO\perp$ 平面 $BCDE$，$BH\subset$ 平面 $BCDE$，所以 $BH\perp PO$．

又因为 $BH\perp DE$，所以 $BH\perp$ 平面 PDE，

所以 $\angle BMH$ 即为 MB 与平面 PDE 所成角．

因为在 $\triangle BOD$ 中，$BH=BE\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

所以 $\tan\angle BMH=\frac{BH}{HM}=\frac{\sqrt{3}}{HM}$.

在平面 PDE 内，当 $HM\perp PD$ 时，HM 最小，

此时 $HM=HD\sin 60^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以此时 $\tan\angle BMH$ 取得最大值，$\angle BMH$ 也最大.

因为 $BM^2=BH^2+HM^2=\frac{39}{4}$，所以 $|\overrightarrow{BM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$.

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

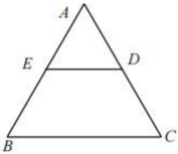


图 1

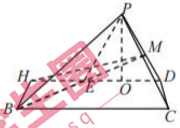


图 2

20．解：（1）记甲得分为 X，则 X 的所有可能取值是 0，1，2.

方法一：因为 $P(X=0)=C_2^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}$

$P(X=1)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$，

$P(X=2)=C_2^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

所以 $E(X)=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{4}\times2=1$.

方法二：因为 X 服从二项分布 $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $E(X)=\frac{1}{2}\times2=1$.

（2）因为 $X+X-2=6$，所以 $X=4$，即比赛六球后甲赢四球，乙赢两球.

比赛六球时发球的次序依次是甲甲乙乙甲甲，

记“比赛六球后甲得分比乙得分多 2 分”为事件 A，

“乙赢两球均在乙发球时”为事件 A_1，“乙赢两球均在甲发球时”为事件 A_2，

“乙赢两球一球在甲发球时，一球在乙发球时”为事件 A_3.

因为 $P\left(A_1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{400}$，

$P\left(A_2\right)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{24}{400}=\frac{3}{50}$，

$P\left(A_3\right)=C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3C_2^1\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{48}{400}$.

所以 $P(A)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right)=\frac{9}{400}+\frac{24}{400}+\frac{48}{400}=\frac{81}{400}=0.2025$.

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

21.【解】（1）因为 $f(-x)=\cos(-x)+\frac{(-x)^2}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数.

因为 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=-\sin x+x$，

当 $x\geq 0$ 时，$f''(x)=-\cos x+1\geq 0$，所以 $f'(x)$ 单调递增，

所以 $f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)\geq f(0)=1$.

因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的最小值 1.

（2）设 $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}-x(x\geq 0)$.

因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x-x-1(x\geq 0)$，所以 $g''(x)=\mathrm{e}^x-1\geq 0$，

所以 $g'(x)$ 单调递增，所以 $g'(x)\geq g'(0)=1$，

所以 $g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geq g(0)=1$，所以 $\mathrm{e}^x\geq\frac{x^2}{2}+x+1$，

设 $h(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}-\cos x(x\geq 0)$，则 $h'(x)=\frac{x^3}{6}-x+\sin x(x\geq 0)$.

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

因为 $h''(x)=\dfrac{x^2}{2}-1+\cos x\ge 0$，所以 $h'(x)$ 单调递增，

所以 $h'(x)>h'(0)=0$，所以 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)\ge h(0)=-1$，

所以 $-\cos x\ge -1-\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^2}{2}$.

所以 $\mathrm{e}^x-\cos x\ge -1-\dfrac{x^4}{24}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}+x+1=-\dfrac{x^4}{24}+x^2+x$.

22．解：（1）当 $AB\perp x$ 轴或 $AB\,/\!/\,x$ 轴时，易得点 P 是 AB 的中点，也是 OQ 的中点，

所以四边形 $OAQB$ 是平行四边形.

当 AB 与 x 轴既不垂直也不平行时，设 AB： $y=kx+m$， OP： $y=k'x$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=k'x\end{cases}$ 得 $x_Q^2=\dfrac{16}{1+4k'^2}$，由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=k'x\end{cases}$ 得 $x_P^2=\dfrac{4}{1+4k'^2}$

所以 $x_Q^2=4x_P^2$，所以 P 是 OQ 的中点.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

因为直线 AB 与椭圆 C_2： $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 有且仅有一个交点 P，

所以 $\Delta=(8km)^2-4\left(1+4k^2\right)\left(4m^2-4\right)=0$，

化简得 $m^2=1+4k^2$，所以 $x_P=-\dfrac{4km}{1+4k^2}=-\dfrac{4km}{m^2}=-\dfrac{4k}{m}$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $\left(1+4k^2\right)x^2+8kmx+4m^2-16=0$，

所以 $x_A+x_B=-\dfrac{8km}{1+4k^2}=-\dfrac{8km}{m^2}=-\dfrac{8k}{m}=2x_P$，

所以点 P 是 AB 的中点，

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq

所以四边形 $OAQB$ 是平行四边形.

（2）当 $AB\perp x$ 轴时，易得 $OQ=4$， $AB=2\sqrt{3}$，四边形 $OAQB$ 是菱形，

所以四边形 $OAQB$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

点 O 到 AB 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$.

因为 $x_A+x_B=-\dfrac{8km}{1+4k^2}=-\dfrac{8km}{m^2}=-\dfrac{8k}{m}=2x_P$， $x_Ax_B=\dfrac{4m^2-16}{1+4k^2}$，

所以 $AB=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{-8km}{1+4k^2}\right)^2-4\times\dfrac{4m^2-16}{1+4k^2}}$

$=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{16\left(16k^2-m^2+4\right)}}{1+4k^2}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{16\left(4m^2-m^2\right)}}{1+4k^2}=\sqrt{1+k^2}\dfrac{4\sqrt{3}\,|m|}{1+4k^2}$，

所以 $\triangle OAB$ 的面积是 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{1+k^2}\dfrac{4\sqrt{3}\,|m|}{1+4k^2}=\dfrac{2\sqrt{3}m^2}{1+4k^2}=2\sqrt{3}$，

因为四边形 $OAQB$ 是平行四边形，所以四边形 $OAQB$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

综上可知：四边形 $OAQB$ 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

江苏学生圈 微信号:jsgkxsq