江苏省百校联考高三年级第一次考试

数学试卷

09.02

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|x^2-2x\le 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,2)$　　C. $[0,1)$　　D. $(0,1]$

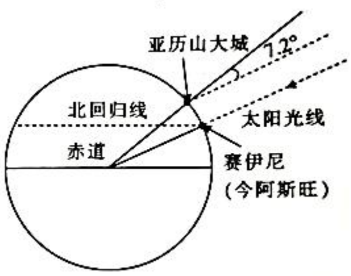
2. 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=4-3\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是互相垂直的单位向量，则与向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 垂直的一个单位向量是（　　）

A. $\vec{a}+\vec{b}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(\vec{a}-2\vec{b})$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-\vec{a}-\vec{b})$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(\vec{a}+2\vec{b})$

4. 埃拉托斯特尼是古希腊亚历山大时期著名的地理学家，他最出名的工作是计算了地球（大圆）的周长.如图，在赛伊尼，夏至那天中午的太阳几乎正在天顶方向（这是从日光直射进该处一井内而得到证明的）.同时在亚历山大城（该处与赛伊尼几乎在同一子午线上），其天顶方向与太阳光线的夹角测得为 $7.2°$.因太阳距离地球很远，故可把太阳光线看成是平行的.埃拉托斯特尼从商队那里知道两个城市间的实际距离大概是 5000 斯塔蒂亚，按埃及的长度算，1 斯塔蒂亚等于 157.5 米，则埃拉托斯特尼所测得地球的周长约为（　　）



A. 38680 千米　　B. 39375 千米　　C. 41200 千米　　D. 42192 千米

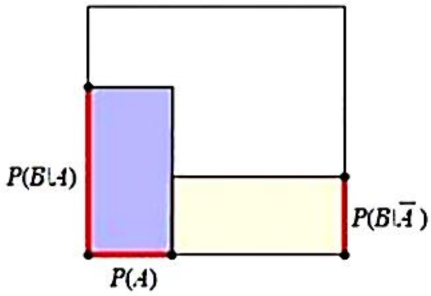
5. 已知关于 x 的不等式 $ax^2+bx+4>0$ 的解集为 $(-\infty,m)\cup\left(\dfrac{4}{m},+\infty\right)$，其中 $m<0$，则 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为（　　）

A. -4　　B. 4　　C. 5　　D. 8

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，设抛物线 $x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，过点 P 作 $PA\perp l$，交准线 l 于点 A，若直线 AF 的倾斜角为 $30°$，则点 P 的纵坐标为（　　）

A. 3　　　　B. 2　　　　C. 1　　　　D. $\frac{1}{2}$

7. 若将整个样本空间想象成一个1×1的正方形，任何事件都对应样本空间的一个子集，且事件发生的概率对应子集的面积，则如图所示的涂色部分的面积表示（　　）



A. 事件A发生的概率　　B. 事件B发生的概率

C. 事件B不发生条件下事件A发生的概率　　D. 事件A，B同时发生的概率

8. 已知$a=\sin 0.1$，$b=\ln 1.1$，$c=e^{0.1}-1$，则（　　）

A. $c<b<a$　　B. $a<b<c$　　C. $c<a<b$　　D. $b<a<c$

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

9. 下列说法正确的有（　　）

A. 已知一组数据7，7，8，9，5，6，8，8，则这组数据的中位数为8

B. 已知一组数据x_1，x_2，x_3，…，x_{10}的方差为2，则x_1+2，x_2+2，x_3+2，…，$x_{10}+2$的方差为2

C. 具有线性相关关系的变量x，y，其线性回归方程为$\hat{y}=0.2x-m$，若样本点的中心为$(m,3.2)$，则$m=4$

D. 若随机变量X服从正态分布$N(2,\sigma^2)$，$P(X\le 3)=0.64$，则$P(1\le X\le 2)=0.14$

10. 已知函数$f(x)=\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则（　　）

A. $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

B. 将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，得到的函数图象关于y轴对称

C. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-1,1]$

D. $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$上单调递增

11. 在棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点M，N分别是棱A_1D_1，AB的中点，则（　　）

A. 异面直线 MD 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$

B. $MC_1 \perp D_1N$

C. 四面体 CAB_1D_1 的外接球体积为 $4\sqrt{3}\pi$

D. 平面 MNC 截正方体所得的截面是四边形

12. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_{n+1}=-S_n+n^2$，则（　　）

A. $a_n+a_{n+1}=2n-1(n\geq 2)$

B. $a_{n+2}-a_n=2$

C. 当 $a_1=0$ 时，$S_{50}=1225$

D. 当数列 $\{a_n\}$ 单调递增时，a_1 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

第II卷（非选择题　共 90 分）

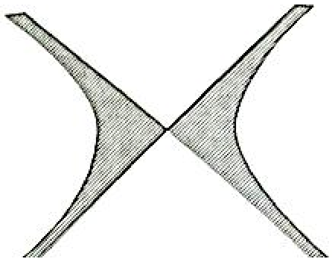
三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为________.

14. 已知角 α 的顶点在坐标原点 O，始边与 x 轴的非负半轴重合，将角 α 的终边绕 O 点逆时针旋转 $\frac{\pi}{12}$ 后，经过点 $(1,-3)$，则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=$________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, x\geq 0\\ |x+2|, x<0\end{cases}$，$g(x)=kx+1$.若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的图象经过四个象限，则实数 k 的取值范围是________.

16. 祖暅是我国南北朝时期伟大的数学家，他于 5 世纪末提出了“幂势既同，则积不容异”的体积计算原理，即“夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等”.现已知直线 $y=\pm 2$ 与双曲线 $x^2-y^2=4$ 及其渐近线围成的平面图形 G 如图所示.若将图形 G 被直线 $y=t(-2\leq t\leq 2)$ 所截得的两条线段绕 y 轴旋转一周，则形成的旋转面的面积 $S=$________；若将图形 G 绕 y 轴旋转一周，则形成的旋转体的体积 $V=$________.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10 分）

从①$(3n-1)a_{n+1}=(3n+2)a_n$，②$a_2=5$，$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$这两个条件中任选一个，补充在下面的问题中并作答.

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，________.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$，求数列$\{a_n+b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

注：若选两个条件分别作答，则按第一个解答计分.

18.（12 分）

在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$B=\frac{2\pi}{3}$，$b=\sqrt{6}$.

（1）若$\triangle ABC$的周长为$2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，求a，c的值；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\sin A\sin C$的值.

19.（12 分）

近年来，师范专业是高考考生填报志愿的热门专业.某高中随机调查了本校 2022 年参加高考的 90 位文科考生首选志愿（第一个院校专业组的第一个专业）填报情况，经统计，首选志愿填报与性别情况如下表：（单位：人）

	首选志愿为师范专业	首选志愿为非师范专业
女性	25	35
男性	5	25

（1）根据表中数据.能否有 95%的把握认为首选志愿为师范专业与性别有关？

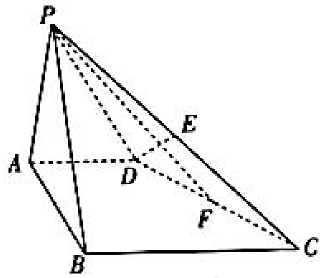
（2）用样本估计总体，用本次调研中首选志愿样本的频率代替首选志愿的概率，从 2022 年全国文科考生中随机抽取 3 人，设被抽取的 3 人中首选志愿为师范专业的人数为X，求X的分布列、数学期望$E(X)$和方差$D(X)$.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$\alpha=P(\chi^2\ge k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20.（12 分）

在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$AD\parallel BC$，$AD\perp AB$，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=PB=AD=\dfrac{1}{2}BC=2$，且 E，F 分别为 PC，CD 的中点.



（1）证明：$DE\parallel$ 平面 PAB.

（2）若直线 PF 与平面 PAB 所成的角为 $60°$，求平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.

21.（12 分）

设 F 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点，过点 F 且与 x 轴不重合的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点.

（1）当 $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$ 时，求 $|\overrightarrow{FA}|$；

（2）在 x 轴上是否存在异于 F 的定点 Q，使 $\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}$ 为定值（其中 k_{QA}，k_{QB} 分别为直线 QA，QB 的斜率）？

若存在，求出 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=2e^{x-1}-a(x-\ln x-1)-2x$，$x\in(1,+\infty)$.

（1）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处的切线方程；

（2）若 $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围.

江苏省百校联考高三年级第一次考试

数学参考答案

第 I 卷（选择题　共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.【答案】A

【解析】$B=\{x|0\le x\le 2\}$，$A\cup B=\{x|-1<x\le 2\}$，选 A.

2.【答案】D

【解析】$z=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\dfrac{1-7\mathrm{i}}{2}$位于第四象限，选 D.

3.【答案】C

【解析】$\vec{a}$，$\vec{b}$是相互垂直的单位向量，由$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)$是与$\vec{a}+\vec{b}$垂直的单位向量，选 C.

4.【答案】B

【解析】设地球半径为r，则$5000\times 157.5=\dfrac{7.2}{180}\pi\cdot r$，

$\therefore 2\pi r=5000\times 157.5\times\dfrac{180}{7.2}\times 2=39375$，选 B.

5.【答案】C

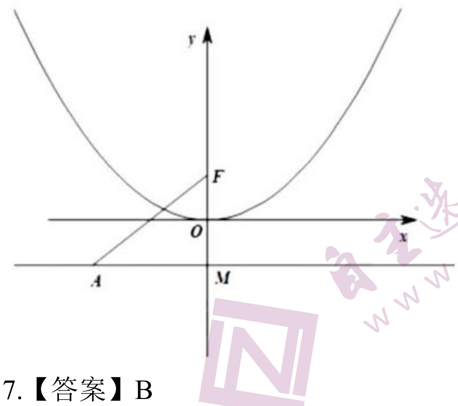
【解析】$ax^2+bx+4>0$的解集为$(-\infty,m)\cup\left(\dfrac{4}{m},+\infty\right)$，

则$a>0$，且m，$\dfrac{a}{m}$是方程$ax^2+bx+4=0$的两根，$m\cdot\dfrac{4}{m}=\dfrac{4}{a}$，$\therefore a=1$，

$m+\dfrac{4}{m}=-\dfrac{b}{a}=-b$，$b=-\left(m+\dfrac{4}{m}\right)\ge 4$，$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}=b+\dfrac{4}{b}\ge 4+\dfrac{4}{4}=5$，选 C.

6.【答案】A

【解析】设准线与y轴交于M点，则$FM=2$，$\angle FAM=30^\circ$，$\therefore AF=4$，$\therefore PA=4$，$\therefore y_P=3$，选 A.



7.【答案】B

【解析】图中阴影既有A发生的情况，又有A不发生的情况，排除 ACD，选 B.

8.【答案】D

【解析】$a=\sin 0.1<0.1$且$b=\ln 1.1<1.1-1=0.1$，$c=e^{0.1}-1>0.1$，$\therefore c$最大构造$f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，

$x\in\left(0,1\right)$，

$\therefore f'\left(x\right)=\cos x-\frac{1}{1+x}>1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{2+2x-x^2(1+x)-2}{2(1+x)}=\frac{x\left(2-x-x^2\right)}{2(1+x)}=\frac{-x(x+2)(x-1)}{2(1+x)}>0$，$\therefore$

$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上$\nearrow$，$\therefore f\left(0.1\right)>f\left(0\right)=0\Rightarrow \sin 0.1>\ln 1.1$，即$a>b$，$\therefore c>a>b$，选 D.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

9.【答案】BD

【解析】5，6，7，7，8，8，8，9 中位数为 7.5，A 错.

x_1，x_2，…，x_n方差为 2，则x_1+2，x_2+2，…，x_n+2方差为 2，B 正确.

$3.2=0.2m-m$，则$m=-4$，C 错，选 BD.

10.【答案】ABD

【解析】$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$相邻两对称轴间距离为$\frac{\pi}{2}$，则$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，

$\therefore \omega=2$，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$2\times\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi}{4}=\pi$，$f\left(x\right)$关于$\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$对称，A 对.

$f\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$关于$y$轴对称，B 对.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$，则$0\le 2x\le\pi$，则$\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{5}{4}\pi$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$，

$\therefore f\left(x\right)\in\left[-1,\sqrt{2}\right]$，C 错误.

$-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{3}{8}\pi\le x\le\frac{\pi}{8}$，$f\left(x\right)$的一个单调增区间为$\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，而$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\subset\left[-\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{8}\right]$，

$\therefore f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{4},0\right]\nearrow$，D 对.

11.【答案】BC

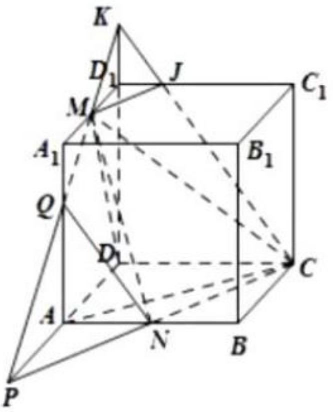
【解析】建系，$M\left(1,0,2\right)$，$\overrightarrow{DM}=\left(1,0,2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(-2,2,0\right)$，

$\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DM}\right\rangle\right|=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，A 错.

$\overrightarrow{MC_1}=\left(-1,2,0\right)$，$\overrightarrow{D_1N}=\left(2,1,-2\right)$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{D_1N}=0$，$\therefore MC_1\perp D_1N$，B 正确；

外接球半径 $2r=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，$\therefore V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=4\sqrt{3}\pi$，C 正确；

截面 $QMJCN$ 为五边形，D 错误.



12.【答案】ACD

【解析】方法一：$S_{n+1}+S_n=n^2$，①

$n\ge 2$ 时，$S_n+S_{n-1}=(n-1)^2$，②

①－②，$a_{n+1}+a_n=2n-1$，A 正确；

$n=1$ 时，$a_1+a_2=-a_1+1$，即 $2a_1+a_2=1$；$n=2$ 时，$a_3+a_2=3$，$\therefore a_3-2a_1=2$，$a_1\ne 0$ 时，不满足条件，B 错误；

$a_1=0$ 时，n 为奇数时是首项为 0，公差为 2 的等差数列，共 25 项；n 为偶数时是首项为 1，公差为 2 的等差数列，共 25 项，所以 $S_{50}=25\times 0+\dfrac{25\times 24}{2}\times 2+25\times 1+\dfrac{25\times 24}{2}\times 2=1225$，C 正确；

$\{a_n\}$ 是单调递增数列，$\therefore a_2>a_1$，即 $-2a_1+1>a_1$，即 $a_1<\dfrac{1}{3}$；

$a_3>a_2$，即 $2a_1+2>-2a_1+1$，即 $a_1>-\dfrac{1}{4}$；

$a_4>a_3$，即 $a_2+2>2a_1+2$，即 $-2a_1+3>2a_1+2$，即 $a_1<\dfrac{1}{4}$，

$a_5>a_4$，即 $a_3+2>a_2+2$ 依次类推可知 $-\dfrac{1}{4}<a_1<\dfrac{1}{4}$，D 正确.

方法二：$S_{n+1}=-S_n+n^2$，①

当 $n\ge 2$ 时，$S_n=-S_{n-1}+(n-1)^2$，②，$\therefore n\ge 2$ 时①－②$\Rightarrow a_{n+1}=-a_n+2n-1$，

即 $a_{n+1}+a_n=2n-1(n\ge 2)$，A 正确；

$a_{n+2}+a_{n+1}=2n+1$，$\therefore a_{n+2}-a_n=2(n\ge 2)$，由于 a_1 未知，B 错误.

$a_1=0$，$a_2=1$，$\therefore S_{50}=\left(a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4\right)+\left(a_5+a_6\right)+\cdots+\left(a_{49}+a_{50}\right)$

$=1+5+9+\cdots+97=\dfrac{98\times 25}{2}=49\times 25=1225$，C 正确；

对于 D，$\because\left\{a_{2n+1}\right\}$，$\left\{a_{2n}\right\}$分别递增，要使$\left\{a_n\right\}\nearrow$，只需$\begin{cases}a_2>a_1\\a_3>a_2\\a_4>a_3\end{cases}$，

而$a_2=1-2a_1$，$a_3=2+2a_1$，$a_4=3-2a_1$，

$\therefore\begin{cases}1-2a_1>a_1\\2+2a_1>1-2a_1\\3-2a_1>2+2a_1\end{cases}\Rightarrow-\dfrac{1}{4}<a_1<\dfrac{1}{4}$，D 正确；选 ACD.

对于 D，法三：由$a_{2n}=1-2a_1+2(n-1)=2n-2a_1-1$，

$a_{2n+1}=a_3+2\left(n-1\right)=2+2a_1+2n-2=2n+2a_1$，

要使$\left\{a_n\right\}\nearrow$，则必有$a_{2n+2}>a_{2n+1}>a_{2n}$且$a_2>a_1$，

$\therefore 2n+2-2a_1-1>2n+2a_1>2n-2a_1-1$且$1-2a_1>a_1\Rightarrow-\dfrac{1}{4}<a_1<\dfrac{1}{4}$，D 正确，选 ACD.

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.【答案】26

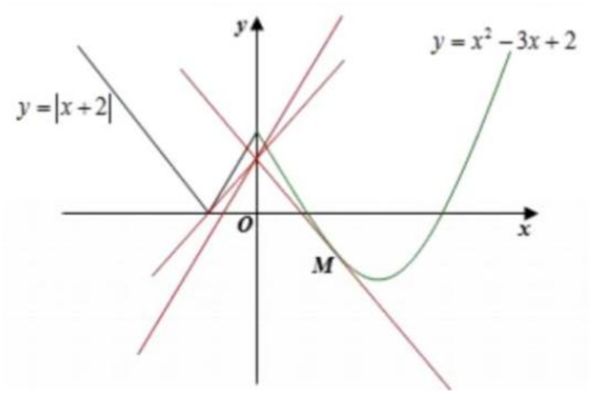
【解析】$(1+x)^6$展开式第$r+1$项$T_{r+1}=C_6^r x^r$，$r=3$，$C_6^3x^3=20x^3$，$r=5$，$C_6^5x^5=6x^5$，$\therefore\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)(1+x)^6$展开式中$x^3$系数 26.

14.【答案】$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

15.【答案】$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$

【解析】直线$y=kx+1$过定点$P\left(0,1\right)$，$h\left(x\right)$过四个象限$\Leftrightarrow f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$在正负半轴都有两个交点，过$P\left(0,1\right)$作$y=x^2-3x+2\left(x\geq 0\right)$的切线，切点设为$M\left(x_0,x_0^2-3x_0+2\right)$，$y'=2x-3$，$k=2x_0-3$，切线$y-\left(x_0^2-3x_0+2\right)=\left(2x_0-3\right)\left(x-x_0\right)$过$\left(1,0\right)$，$x_0=1$时$k=-1$，$-1<x<0$时$f\left(x\right)=x+2$，斜率为 1.

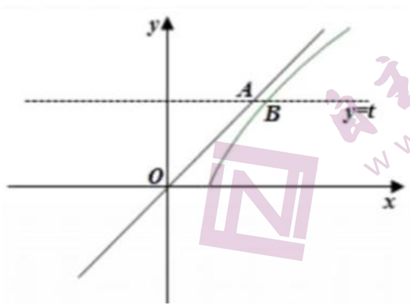
$\therefore y=\left|x+2\right|$与$x$轴交于$N\left(-2,0\right)$，$k_{PN}=\dfrac{1}{2}$，$\therefore 1<k<\dfrac{1}{2}$.



16.【答案】4π；16π

【解析】如图所示，双曲线 $x^2-y^2=4$，$A(t,t)$，$B\left(\sqrt{4+t^2},t\right)$，$S=\pi\left(\sqrt{4+t^2}\right)^2-\pi t^2=4\pi$，

$V=4\pi\times4=16\pi$.



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.【解析】

（1）选①，由 $(3n-1)a_{n+1}=(3n+2)a_n$ 及 $a_1=2$，可知 $a_n\neq0$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3n+2}{3n-1}$，

当 $n\geq2$ 时，有 $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_2}{a_1}\times a_1$

$=\dfrac{3n-1}{3n-4}\times\dfrac{3n-4}{3n-7}\times\cdots\times\dfrac{11}{8}\times\dfrac{8}{5}\times\dfrac{5}{2}\times2=3n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_1=3\times1-1=3n-1$，故 $a_n=3n-1$.

选②，由 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，得 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列，

由 $a_1=2$，$a_2=5$，得该数列的公差 $d=a_2-a_1=5-2=3$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$.

（2）$b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n-1}$，$\therefore a_n+b_n=3n-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3n-1}$，

$$\therefore T_n=\frac{(2+3n-1)n}{2}+\frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{8}}=\frac{(3n+1)n}{2}+\frac{2}{7}\left[1-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right].$$

18.【解析】

（1）因为$a+b+c=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$，所以$a+c=2\sqrt{2}$①

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即$6=(a+c)^2-ac$②

由①②得$ac=2$③.

由①③得$a=c=\sqrt{2}$.

（2）由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$ac=\frac{4}{3}$，

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$，得$a=2\sqrt{2}\sin A$，$c=2\sqrt{2}\sin C$，

所以$ac=2\sqrt{2}\sin A\times2\sqrt{2}\sin C=8\sin A\sin C=\frac{4}{3}$，即$\sin A\sin C=\frac{1}{6}$.

19.【解析】

（1）$\chi^2=\frac{90(25\times25-35\times5)^2}{60\times30\times30\times60}=5.625>3.841$，

∴有 95%的把握认为首选志愿为师范专业与性别有关.

（2）某个考生首选志愿为师范专业的概率$P=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$，

X的所有可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，$P(X=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，

$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$，$P(X=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

∴X的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

∴$E(X)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=1$，$D(X)=1\times\frac{8}{27}+1\times\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$.

或由 $X\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$ 的二项分布知 $E\left(X\right)=np=1$，$D(X)=3\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$.

20.【解析】

（1）取 PB 中点 M，连接 AM，EM，$\because E$ 为 PC 的中点，

$\therefore ME\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}BC$，又$\because AD\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}BC$，$\therefore ME\underline{\underline{/\!/}}AD$，$\therefore$四边形 $ADEM$ 为平行四边形，

$\therefore DE/\!/AM$，$\because DE\not\subset$平面 PAB，$AM\subset$平面 PAB，$\therefore DE/\!/$平面 PAB.

（2）$\because$平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$，

$BC\subset$平面 $ABCD$，$BC\perp AB$，$\therefore BC\perp$平面 PAB，取 AB 中点 G，连接 FG，

$\therefore FG/\!/BC$，$FG\perp$平面 PAB，$\therefore\angle GPF=60^\circ$，$GF=3$，

$\therefore\tan60^\circ=\frac{3}{PG}\Rightarrow PG=\sqrt{3}$，$\therefore AG=GB=1$，$AB=2$，

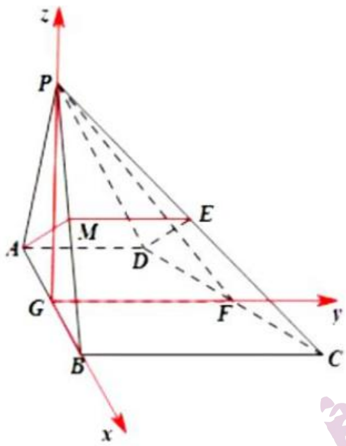
如图建系，$\therefore P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$C\left(1,4,0\right)$，$D\left(-1,2,0\right)$，

$\therefore\overrightarrow{PC}=\left(1,4,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-2,-2,0\right)$，设平面 PCD 的一个法向量 $\overrightarrow{n_1}=\left(x,y,z\right)$，

$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+4y-\sqrt{3}z=0\\-2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left(-1,1,\sqrt{3}\right)$，

平面 PAB 的一个法向量 $\overrightarrow{n_2}=\left(0,1,0\right)$，设平面 PAB 与平面 PCD 所成锐二面角为 θ，

$\therefore\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.



21.【解析】

解析一：（1）设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，

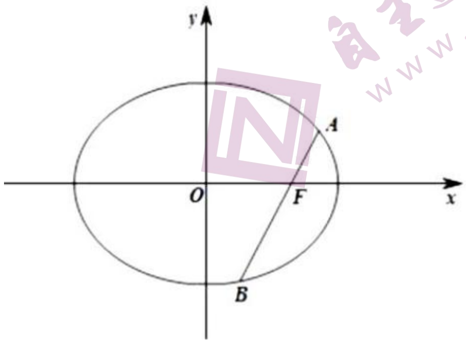
$\begin{cases}x=my+1\\x^2+2y^2=2\end{cases}\Rightarrow\left(m^2+2\right)y^2+2my-1=0$，

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2} \\ y_1y_2=\dfrac{-1}{m^2+2} \\ y_2=-2y_1 \end{cases} \Rightarrow m^2=\frac{2}{7}，\ |y_1|=\frac{2|m|}{m^2+2}=\frac{\sqrt{14}}{8}，$$

$\therefore |\overrightarrow{FA}|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1|=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，

$\therefore |\overrightarrow{FA}|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1|=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，

或设 $FA=m$，$FB=2m$，$\therefore \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2m}=\dfrac{2a}{b^2}=2\sqrt{2}\Rightarrow m=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$，即$|\overrightarrow{FA}|=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.



（2）假设存在$Q(t,0)$符合题意，则易知当 $AB\perp x$ 轴时，$k_{QA}=-k_{QB}$，

此时$\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}=-1$，这个定值一定为－1.

当$\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}=-1$时，$k_{QA}+k_{QB}=0\Rightarrow \dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0\Rightarrow \dfrac{y_1}{my_1+1-t}+\dfrac{y_2}{my_2+1-t}=0$，

$\therefore 2my_1y_2+(1-t)(y_1+y_2)=0\Rightarrow 2m\dfrac{-1}{m^2+2}+(1-t)\cdot\dfrac{-2m}{m^2+2}=0\Rightarrow t=2$，

$\therefore$存在$Q(2,0)$符合题意.

解析二：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FA}$，得$\begin{cases}1-x_2=2(x_1-1)\\-y_2=2y_1\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_2=2x_1-3\\-y_2=2y_1\end{cases}$，

因为 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$ 在椭圆上，所以 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \dfrac{\left(2x_1-3\right)^2}{2}+4y_1^2=1\end{cases}$，解得 $x_1=\dfrac{5}{4}$，

所以 $\left|\overrightarrow{FA}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{5}{4}-1\right)^2+1-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{5}{4}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$.

（2）假设在 x 轴上存在异于点 F 的定点 $Q\left(t,0\right)\left(t\neq 1\right)$，使得 $\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}$ 为定值.

设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，

联立直线与椭圆的方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\\ x=my+1\end{cases}$，得 $\left(m^2+2\right)y^2+2my-1=0$，

由韦达定理，得 $y_1+y_2=\dfrac{-2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-1}{m^2+2}$，所以 $y_1+y_2=2my_1y_2$.

所以

$$\frac{k_{QA}}{k_{QB}}=\frac{\dfrac{y_1}{x_1-t}}{\dfrac{y_2}{x_2-t}}=\frac{y_1\cdot\left(x_2-t\right)}{y_2\cdot\left(x_1-t\right)}=\frac{y_1\left(my_2+1-t\right)}{y_2\cdot\left(my_1+1-t\right)}=\frac{my_1y_2+(1-t)y_1}{my_1y_2+(1-t)y_2}=\frac{2my_1y_2+2(1-t)y_1}{2my_1y_2+2(1-t)y_2}=\frac{(3-2t)y_1+y_2}{y_1+(3-2t)y_2}.$$

要使 $\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}$ 为定值，则 $\dfrac{3-2t}{1}=\dfrac{1}{3-2t}$，解得 $t=2$ 或 $t=1$（舍去），此时 $\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}=-1$.

故在 x 轴上存在异于 F 的定点 $Q\left(2,0\right)$，使得 $\dfrac{k_{QA}}{k_{QB}}$ 为定值.

22.【解析】

解析一：（1）$a=0$ 时，$f(x)=2e^{x-1}-2x$，$f'(x)=2e^{x-1}-2$，$k=f'(2)=2e-2$，

切点 $\left(2,2e-4\right)$，切线方程为 $y=(2e-2)(x-2)+2e-4=(2e-2)x-2e$.

（2）法一：$2e^{x-1}-a(x-\ln x-1)-2x>0\Rightarrow a<\left(\dfrac{2e^{x-1}-2x}{x-\ln x-1}\right)_{\min}$，

$\ln x>x-1-\dfrac{(x-1)^2}{2}(x>1)$，$e^{x-1}>1+x-1+\dfrac{(x-1)^2}{2}=x+\dfrac{(x-1)^2}{2}$，

$$\therefore \frac{2\left(e^{x-1}-x\right)}{x-\ln x-1}>\frac{2\cdot\frac{(x-1)^2}{2}}{\frac{(x-1)^2}{2}}=2,\ \therefore a\le 2.$$

法二：必要性探路（端点效应）由 $f\left(x\right)>f\left(1\right)$， $f'(x)=2e^{x-1}-a\left(1-\frac{1}{x}\right)-2$， $f'\left(1\right)=0$，

$f''(x)=2e^{x-1}-\frac{a}{x^2}$， $f''\left(1\right)=2-a$，

若 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，则存在 $\delta>1$，使得当 $x\in\left(1,\delta\right)$ 时， $f''\left(x\right)<0$， $f'\left(x\right)\searrow$

此时 $f'\left(x\right)<f'\left(1\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)$ 在 $\left(1,\delta\right)$ 上 $\searrow$，

$\therefore f\left(x\right)<f\left(1\right)=0$，这与 $f\left(x\right)>f\left(1\right)$ 矛盾，舍去.

若 $2-a\ge 0$，即 $a\le 2$ 时， $f''(x)\ge 2\left(e^{x-1}-\frac{1}{x^2}\right)>0$， $f'\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上 $\nearrow$

$\therefore f'\left(x\right)>f'\left(1\right)=0$， $\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上 $\nearrow$， $\therefore f\left(x\right)>f\left(1\right)=0$ 符合题意，

综上： $a\le 2$.

法三：由 $f(x)=2e^{x-1}-a(x-\ln x-1)-2x>0$，

得 $2e^{x-1}-a(x-1)>2x-a\ln x=2e^{\ln x}-a\ln x$， $x\in\left(1,+\infty\right)$.

构造函数 $g(x)=2e^{x}-ax$， $x\in\left(0,+\infty\right)$，则 $g\left(x-1\right)>g\left(\ln x\right)$ 恒成立.

构造函数 $h\left(x\right)=x-1-\ln x$， $x\in\left(1,+\infty\right)$，

则 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，

得 $h\left(x\right)>h\left(1\right)=1-1-\ln 1=0$，即当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $x-1>\ln x$ 恒成立，

所以 $g(x)=2e^{x}-ax$， $x\in\left(0,+\infty\right)$ 为单调递增函数，

所以 $g'\left(x\right)=2e^{x}-a\ge 0$， $x\in\left(0,+\infty\right)$，故 $a\le 2$.

法四：由题意得 $f'(x)=2e^{x-1}-a\left(1-\frac{1}{x}\right)-2$， $x\in\left[1,+\infty\right)$，

令 $g(x)=2e^{x-1}-a\left(1-\frac{1}{x}\right)-2$， $x\in\left[1,+\infty\right)$，则 $g'(x)=2e^{x-1}-\frac{a}{x^2}$.

①当 $a\le 2$ 时， $g'\left(x\right)>0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，得

$g(x)>g(1)=2e^{1-1}-a\left(1-\frac{1}{1}\right)-2=0$，即 $f'(x)=2e^{x-1}-a\left(1-\frac{1}{x}\right)-2>0$，

所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增，得 $f\left(x\right)>f\left(1\right)=0$. 故当 $a\le 2$ 时，$f\left(x\right)>0$.

②当 $a>2$ 时，$g'(x)=2e^{x-1}-\frac{a}{x^2}$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增.

因为 $g'\left(1\right)=2-a<0$，当 $a>2$ 时，$\frac{\sqrt{2a}}{2}>1$，

$$g'\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)=2e^{\frac{\sqrt{2a}}{2}-1}-\frac{a}{\left(\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)^2}=2\left(e^{\frac{\sqrt{2a}}{2}-1}-1\right)>0,$$

所以存在唯一 $x_0\in\left(1,\frac{\sqrt{2a}}{2}\right)$，使得 $g'\left(x_0\right)=0$.

当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，$g'\left(x\right)<0$，即 $g\left(x\right)$ 在 $\left(1,x_0\right)$ 上单调递减，又 $g\left(1\right)=0$，

所以 $g\left(x\right)<0$，即 $f'\left(x\right)<0$，所以 $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,x_0\right)$ 上单调递减，

又 $f\left(1\right)=0$，所以当 $x\in\left(1,x_0\right)$ 时，$f\left(x\right)<0$，不符合题意.

故 a 的取值范围为 $\left(-\infty,2\right]$.