参考答案及解析

数学（一）

一、选择题

1. D 【解析】由题得集合 $M=\{x\mid 0\leqslant x^2-3x<4\}=(-1,0]\cup[3,4)$，又 $N=\left\{x\mid x\leqslant\frac{7}{2}\right\}$，所以 $M\cap N=(-1,0]\cup\left[3,\frac{7}{2}\right]$. 故选 D.

2. A 【解析】由 $(1-\mathrm{i})\bar{z}=(2-\mathrm{i})^2$，得 $\bar{z}=\frac{(2-\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3-4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，故 z 在复平面内对应的点 $\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$ 位于第一象限. 故选 A.

3. A 【解析】由 $\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{BE}$，得 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=4(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB})$，整理得 $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$，所以 $\lambda\mu=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{16}$. 故选 A.

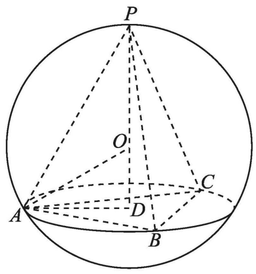
4. B 【解析】设光岳楼墩台的高为 h，则 $h=\frac{1}{4}\times(32+4)=9$ m，所以光岳楼墩台的体积约为 $V=\frac{1}{3}\times(32^2+34.5^2+32\times34.5)\times9=9\ 954.75\ \mathrm{m}^3$. 故选 B.

5. D 【解析】先后按动 A,B,C 中的两个不同的开关，有 $\mathrm{A}_3^2=6$ 种方法，若要 1 号灯亮，则按第一个开关时，1 号灯灭，按第二个开关时，1 号灯亮，此时对应的方法有 2 种：(B,C)，(C,B)；若要 2 号灯亮，同理可得有以下 2 种方法：(A,C)，(C,A)，故所求的概率为 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. 故选 D.

6. C 【解析】由题意可知，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，因为 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}<\frac{T}{4}$，所以 $x=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{7\pi}{24}$ 为 $f(x)$ 的一条对称轴，则 $f(x)$ 在 $x=\frac{7\pi}{24}$ 之后的零点依次为 $\frac{7\pi}{24}+\frac{T}{4}=\frac{13\pi}{24}$，$\frac{7\pi}{24}+\frac{3T}{4}=\frac{25\pi}{24}$，$\frac{7\pi}{24}+\frac{5T}{4}=\frac{37\pi}{24}$，$\frac{7\pi}{24}+\frac{7T}{4}=\frac{49\pi}{24}$，…，若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},t\right]$ 上恰有 3 个零点，则 $\frac{37\pi}{24}\leqslant t<\frac{49\pi}{24}$. 故选 C.

7. D 【解析】由题意得 $a=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{4-\ln 4}{e^2}=\frac{\ln\frac{e^2}{2}}{\frac{e^2}{2}}$，$c=\frac{\sqrt{e}}{2e}=\frac{\ln\sqrt{e}}{\sqrt{e}}$，设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x>0$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，故当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，又 $a=f(4)=f(2)$，$b=f\left(\frac{e^2}{2}\right)$，$c=f(\sqrt{e})$，所以 $a=f(2)>f(\sqrt{e})=c$，$a=f(4)<f\left(\frac{e^2}{2}\right)=b$，所以 $c<a<b$. 故选 D.

8. C 【解析】易知当正三棱锥的体积最大时，其外接球的球心在正三棱锥内部. 如图，

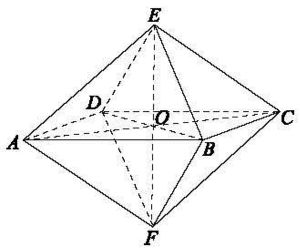


在正三棱锥 $P-ABC$ 中，设 $AB=a$，$\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 D，半径为 r，正三棱锥外接球的球心为 O，半径 $R=2$，则 $r=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，连接 PD，则 $PD\perp$ 平面 ABC，且点 O 在线段 PD 上，连接 OA，则 $PD=R+\sqrt{R^2-r^2}=2+\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}$，所以正三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}\right)$，令 $t=\sqrt{4-\frac{1}{3}a^2}\ (0<t<2)$，则 $a^2=12-3t^2$，所以 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}(4-t^2)(2+t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(-t^3-2t^2+4t+8)$. 设 $f(t)=-t^3-2t^2+4t+8\ (0<t<2)$，则 $f'(t)=-3t^2-4t+4$，令 $f'(t)=0$，得 $t=\frac{2}{3}$ 或 $t=-2$（舍去），则当 $0<t<\frac{2}{3}$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增；当 $\frac{2}{3}<t<2$ 时，

$f'(t)<0$，$f(t)$单调递减，所以当$t=\frac{2}{3}$时，$f(t)$取极大值，即最大值，则此时V最大，$V_{max}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(-\frac{8}{27}-\frac{8}{9}+\frac{8}{3}+8\right)=\frac{64\sqrt{3}}{27}$.故选C.

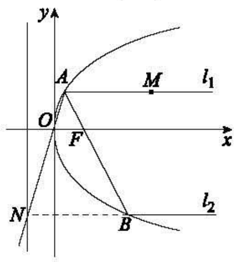
二、选择题

9. ABC 【解析】因为$BC /\!/ AD$，所以$\angle EAD$(或其补角)即为异面直线AE与BC所成的角，又$AD=DE=AE$，所以$\angle EAD=60°$，即异面直线AE与BC所成的角为$60°$，A正确；连接AC交BD于点O，则点O为正方形$ABCD$的中心，连接EF，根据正棱锥的性质可知EF必过点O，且$OE\perp$平面$ABCD$，所以$OE\perp BD$，又$BD\perp AC$，$OE\cap AC=O$，OE，$AC\subset$平面ACE，所以$BD\perp$平面ACE，又$CE\subset$平面ACE，所以$BD\perp CE$，B正确；由对称性可知$OE=OF$，$OA=OC$，所以四边形$AFCE$为平行四边形，所以$AF /\!/ CE$，又$AF\not\subset$平面CDE，$CE\subset$平面CDE，所以$AF /\!/$平面CDE，同理$BF /\!/$平面CDE，又$AF\cap BF=F$，AF，$BF\subset$平面ABF，所以平面$ABF /\!/$平面CDE，C正确；由$AE=AF$，$OE=OF$，得$AO\perp EF$，在正方形$ABCD$中，$AO\perp BD$，又$BD\cap EF=O$，所以$AO\perp$平面$BEDF$，所以$\angle AEO$即为直线AE与平面BDE所成的角，设该八面体的棱长为2，则$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$，所以$EO=\sqrt{AE^2-AO^2}=\sqrt{2}=AO$，所以$\angle AEO=45°$，D错误.故选ABC.



10. BD 【解析】由题得$f'(x)=x^2+2f'(1)x$，所以$f'(1)=1+2f'(1)$，解得$f'(1)=-1$，A错误；所以$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}$，$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$，则当$x<0$或$x>2$时，$f'(x)>0$；当$0<x<2$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上单调递增，在$(0,2)$上单调递减，所以$f(x)$有两个极值点，B正确；$f'(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqslant-1$，所以以曲线$y=f(x)$的切线的斜率不可能为$-2$，C错误；因为$f(x)+f(2-x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{5}{3}+\frac{1}{3}(2-x)^3-(2-x)^2+\frac{5}{3}=2$，所以点$(1,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心，D正确.故选BD.

11. AD 【解析】由题意可得$F(1,0)$，准线方程为$x=-1$，A正确；由抛物线的光学性质可知，直线AB经过焦点F，且斜率不为0，设直线AB：$x=my+1$，联立$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$，消去$x$得$y^2-4my-4=0$，$\Delta>0$，所以$y_1y_2=-4$，B错误；若点$M(2,1)$，则$y_1=1$，所以$y_2=-4$，所以$x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=4$，所以$|AB|=x_1+x_2+2=\frac{1}{4}+4+2=\frac{25}{4}$，C错误；易知直线$OA$：$y=\frac{y_1}{x_1}x$，联立$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1}x\\ x=-1\end{cases}$，解得$y_N=-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4}}=-\frac{4}{y_1}$，由$y_1y_2=-4$，得$y_2=\frac{-4}{y_1}$，所以$y_N=y_2$，所以点$N$在直线$l_2$上，D正确.故选AD.



12. BCD 【解析】因为非常数函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，若$f(2-x)$为奇函数，则$f(2+x)=-f(2-x)$，则$f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称，且$f(2)=0$，故A错误；因为$f(2x+4)$为偶函数，所以$f(2x+4)=f(-2x+4)$，即$f(x+4)=f(-x+4)$，则$f(x)=f(8-x)$，又$f(2+x)=-f(2-x)$，所以$f(x)=-f(4-x)$，所以$f(8-x)=-f(4-x)$，即$f(x+4)=-f(x)$，所以$f(x+8)=f(x)$，故$f(x)$的周期为8，所以$f(2\ 024)=f(0)$，$f(2\ 020)=f(4)$，在$f(x+4)=-f(x)$中，令$x=0$，得$f(4)=-f(0)$，所以$f(2\ 024)=-f(2\ 020)$，故B正确；对$f(x+8)=f(x)$两边同时求导，得$f'(x+8)=f'(x)$，所以导函数$f'(x)$的周期为8，所以$f'(-1)=f'(7)$，故C正确；由$f'(x)$周期$T=8$，得$f'(-2\ 021)=f'(3)$，$f'(2\ 025)=f'(1)$，对$f(x)=-f(4-x)$两边同时求导，得$f'(x)=f'(4-x)$，令$x=1$，得$f'(1)=f'(3)$，所以$f'(-2\ 021)=f'(2\ 025)$，故D正确.故选BCD.

三、填空题

13. 7 【解析】令$x=1$，得$(3-a)(-1)^7=4$，解得$a=7$.

14. $x-\sqrt{3}y-1=0$(或$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}+2=0$或$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$，写出一个即可) 【解析】由题意得，圆C与圆D相外切，且$C(-1,0)$，$D(0,-\sqrt{3})$，将两圆的

方程相减即得两圆的内公切线方程：$x-\sqrt{3}y-1=0$. 因为圆 C 与圆 D 的半径相等，故外公切线与直线 CD 平行，又 $k_{CD}=\frac{0+\sqrt{3}}{-1-0}=-\sqrt{3}$，所以圆 C 与圆 D 的外公切线的方程可设为 $y=-\sqrt{3}x+b$，即$\sqrt{3}x+y-b=0$，则$\frac{|-\sqrt{3}+0-b|}{2}=1$，解得 $b=-\sqrt{3}+2$ 或 $b=-\sqrt{3}-2$，所以两条外公切线的方程为$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}+2=0$ 或$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$. 综上所述，圆 C 与圆 D 公切线的方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 或$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}+2=0$ 或$\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}-2=0$.

15. $e-1$ 【解析】设 (t,e^t-1) 是曲线 $f(x)$ 上的一点，$f'(x)=e^x$，所以 $f(x)$ 在点 (t,e^t-1) 处的切线方程为 $y-e^t+1=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t-1$，令 $g'(x)=\frac{1}{x}=e^t$，解得 $x=e^{-t}$，又 $g(e^{-t})=1-t$，所以$\frac{1-t-e^t+1}{e^{-t}-t}=e^t$，$1-t=(1-t)e^t$，所以 $t=0$ 或 $t=1$. 当 $t=0$ 时，切线方程为 $y=x$，此时 $b=0$，不符合题意，舍去. 当 $t=1$ 时，切线方程为 $y=ex-1$，故 $k=e$，$b=-1$，所以 $k+b=e-1$.

16. $50\sqrt{10}$ 【解析】以点 C 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，由小王与灯 B 的最短距离为 50 m，得 $a-c=50$，又 $|AB|=2c=400$，则$c=200$，$a=250$. 由于点 M 与灯 A，B 的距离之比为 3∶2，所以可设点 M 与灯 A，B 的距离分别为 $3k$，$2k$，$k>0$，由椭圆的定义可知 $3k+2k=2\times250=500$，解得 $k=100$，所以 $|MA|=300$，$|MB|=200$，所以 $\cos\angle AMB=\frac{|MA|^2+|MB|^2-|AB|^2}{2|MA|\cdot|MB|}=\frac{300^2+200^2-400^2}{2\times300\times200}=-\frac{1}{4}$. 由$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$，得$\overrightarrow{MC}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+2|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{MB}|\cos\angle AMB)=25\ 000$，所以$|\overrightarrow{MC}|=50\sqrt{10}$，即此时小王与灯 C 的距离为 $50\sqrt{10}$ m.

四、解答题

17. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

由 a_2，a_5，a_{14} 成等比数列，得 $a_5^2=a_2a_{14}$，

即$(1+4d)^2=(1+d)(1+13d)$，

即 $d^2-2d=0$，解得 $d=0$ 或 $d=2$. (3 分)

当 $d=0$ 时，$a_n=1$；

当 $d=2$ 时，$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

综上所述，$a_n=1$ 或 $a_n=2n-1$. (5 分)

(2)由(1)可知，当数列 $\{a_n\}$ 的公差不为 0 时，$a_n=2n-1$，

则 $S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$， (6 分)

所以$\frac{1}{\sqrt{S_{2n-1}S_{2n+1}}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$， (8 分)

所以 $T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $T_n<\frac{1}{2}$. (10 分)

18. 解：(1)因为 $c\cos C\cos(A-B)+c=c\sin^2C+b\sin A\sin C$，

所以由正弦定理得 $\sin C\cos C\cos(A-B)+\sin C=\sin^3C+\sin A\sin B\sin C$，

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，

所以 $\cos C\cos(A-B)+1=\sin^2C+\sin A\sin B$， (3 分)

则 $\sin A\sin B=\cos C\cos(A-B)+(1-\sin^2C)$

$=\cos C\cos(A-B)+\cos^2C$

$=\cos C[\cos(A-B)+\cos C]$

$=\cos C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\cos C\sin A\sin B$， (4 分)

又因为 $A,B\in(0,\pi)$，所以 $\sin A,\sin B\neq0$，

所以 $\cos C=\frac{1}{2}$，

所以 $C=\frac{\pi}{3}$. (6 分)

(2)由(1)可知 $C=\frac{\pi}{3}$，

所以由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab\geqslant2ab-ab=ab$，

即 $ab\leqslant c^2=16$，当且仅当 $a=b=4$ 时取等号. (9 分)

因为$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}c\cdot CD$，

所以 $CD=\frac{ab\sin C}{c}=\frac{\sqrt{3}ab}{8}\leqslant\frac{\sqrt{3}\times16}{8}=2\sqrt{3}$，

所以线段 CD 长度的最大值为 $2\sqrt{3}$. (12 分)

19. 解：(1)∵线段 AB 是圆 O 的直径，

∴$AE\perp BE$，

∴$BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=3$. (1 分)

∵$BC\perp$平面 ABE，AE，$BE\subset$平面 ABE，

∴$BC\perp AE$，$BC\perp BE$，

∴$CE=\sqrt{BE^2+BC^2}=\sqrt{34}$. (2 分)

又 $BC\cap BE=B$，BC，$BE\subset$平面 BCE，

∴$AE\perp$平面 BCE，

∴$AE\perp CE$. (3分)

设点 B 到平面 ACE 的距离为 d,

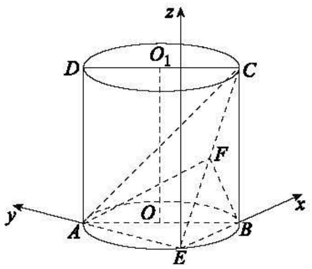
则由 $V_{C-ABE}=V_{B-ACE}$,得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE\cdot BE\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AE\cdot CE\cdot d$,

∴ $d=\frac{BE\cdot BC}{CE}=\frac{3\times5}{\sqrt{34}}=\frac{15\sqrt{34}}{34}$,

即点 B 到平面 ACE 的距离为 $\frac{15\sqrt{34}}{34}$. (5分)

(2)由(1)可知 $AE\perp BE$,

以点 E 为坐标原点,EB,EA 所在直线分别为 x 轴,y 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $E(0,0,0)$,$B(3,0,0)$,$A(0,4,0)$,$C(3,0,5)$,$F\left(\frac{3}{2},0,\frac{5}{2}\right)$,

∴ $\overrightarrow{AF}=\left(\frac{3}{2},-4,\frac{5}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(3,-4,0)$,$\overrightarrow{EA}=(0,4,0)$. (7分)

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}x-4y+\frac{5}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3x-4y=0\end{cases}$,

取 $x=4$,则 $\boldsymbol{n}=\left(4,3,\frac{12}{5}\right)$,

由(1)可知,平面 BEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{EA}=(0,4,0)$. (10分)

设二面角 $A-BF-E$ 的大小为 θ,由图可知 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EA}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EA}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{EA}|}=\frac{\left|4\times0+3\times4+\frac{12}{5}\times0\right|}{\sqrt{4^2+3^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}\times4}=\frac{15\sqrt{769}}{769}$,

即二面角 $A-BF-E$ 的余弦值为 $\frac{15\sqrt{769}}{769}$. (12分)

20.解:(1)由题得 $f'(x)=2-e^x$,

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln 2$, (2分)

当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,

所以当 $x=\ln 2$ 时,$f(x)$ 取得极大值,且极大值为 $f(\ln 2)=2\ln 2+2$,无极小值. (5分)

(2)由(1)可知 $f(x)$ 的最大值为 $f(\ln 2)=2\ln 2+2$, (6分)

故要证当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)<x-\sin x+4$,

只需证当 $x\geqslant0$ 时,$2\ln 2+2<x-\sin x+4$,

即证当 $x\geqslant0$ 时,$x-\sin x+2-2\ln 2>0$. (8分)

设 $g(x)=x-\sin x+2-2\ln 2$,$x\geqslant0$,

则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增, (10分)

所以 $g(x)\geqslant g(0)=2-2\ln 2=2\ln\frac{e}{2}>2\ln 1=0$,

所以当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)<x-\sin x+4$. (12分)

21.解:(1)提出零假设 H_0:网民选择在甲、乙直播间购买夏橙与性别没有关联.

经计算得 $\chi^2=\frac{100\times(50\times15-30\times5)^2}{80\times20\times55\times45}=\frac{100}{11}\approx9.091>7.879=x_{0.005}$, (2分)

依据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验,我们推断 H_0 不成立,即认为网民选择在甲、乙直播间购买夏橙与性别有关联. (3分)

(2)记事件 A:黄蓉上午在甲直播间购买夏橙,事件 B:黄蓉下午在乙直播间购买夏橙,

则 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$,$P(B|A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$,

$P(B|A)=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$, (5分)

由全概率公式可得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{7}{20}$,

所以黄蓉下午选择在乙直播间购买夏橙的概率为 $\frac{7}{20}$. (7分)

(3)利用样本分布的频率估计总体分布的概率,可知网民选择在甲直播间购买夏橙的概率为 $p=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, (8分)

则 $X\sim B\left(50\ 008,\frac{4}{5}\right)$,

记 $n=50\ 008$,$p=\frac{4}{5}$,

则 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,50\ 008)$,

则问题等价于求当 k 取何值时 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 取最大值. (9分)

解法1:

由 $\begin{cases}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\geqslant C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}\\ C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\geqslant C_n^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}\end{cases}$,

化简得 $\begin{cases}\frac{p}{k}\geqslant\frac{1-p}{n+1-k}\\ \frac{1-p}{n-k}\geqslant\frac{p}{k+1}\end{cases}$,

即 $(n+1)p-1\leqslant k\leqslant(n+1)p$,

所以 $50\ 009p-1\leqslant k\leqslant 50\ 009p$,　(11 分)

因 $k\in\mathbf{N}$,解得 $k=40\ 007$,

所以使事件"$X=k$"的概率取最大值的 k 的值为 $40\ 007$.　(12 分)

解法 2:

因为 $0<p<1$, $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}=1+\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}$,

所以当 $k<(n+1)p$ 时,$P(X=k)>P(X=k-1)$;

当 $k=(n+1)p$ 时,$P(X=k)=P(X=k-1)$;

当 $k>(n+1)p$ 时,$P(X=k)<P(X=k-1)$,

所以 $P(X=k)$ 在 $(0,(n+1)p)$ 上单调递增,在 $((n+1)p,n)$ 上单调递减.　(11 分)

又 $(n+1)p=50\ 009\times\frac{4}{5}=40\ 007.2$,

所以 $P(X=40\ 007)>P(X=40\ 008)$,

且 $P(X=40\ 007)>P(X=40\ 006)$,

所以当 $k=40\ 007$ 时,$P(X=k)$ 取最大值,

即使事件"$X=k$"的概率取最大值的 k 的值为 $40\ 007$.　(12 分)

22.**解**:(1)由已知得 $\begin{cases}a^2+b^2=2^2\\ \frac{b}{a}=1\end{cases}$,

解得 $a^2=b^2=2$,

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.　(4 分)

(2)由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0,

所以 $m\neq 0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $D(x_1,-y_1)$,

由(1)可知,双曲线 C 的渐近线为 $y=\pm x$,

又直线 l 与双曲线 C 的右支交于 A,B 两点,

则 $\frac{1}{|m|}>1$,即 $0<|m|<1$.　(6 分)

联立 $\begin{cases}x=my+1\\ x^2-y^2=2\end{cases}$,消去 x 得 $(m^2-1)y^2+2my-1=0$,

则 $\Delta=4m^2+4(m^2-1)=4(2m^2-1)>0$,得 $\frac{\sqrt{2}}{2}<|m|<1$,

$y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2-1}$, $y_1y_2=-\frac{1}{m^2-1}$,

则 $y_1+y_2=2my_1y_2$,　(8 分)

又 $F(2,0)$,

所以 $\overrightarrow{FB}=(x_2-2,y_2)$, $\overrightarrow{FD}=(x_1-2,-y_1)$,

所以 $(x_1-2)y_2+(x_2-2)y_1=(my_1-1)y_2+(my_2-1)y_1=2my_1y_2-(y_1+y_2)=0$,

所以 $\overrightarrow{FB}/\!/\overrightarrow{FD}$,　(10 分)

又 $\overrightarrow{FB}$,$\overrightarrow{FD}$ 有公共点 F,

所以 B,F,D 三点共线,

所以直线 BD 过点 F.　(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。