机密★启用前(全国卷理科数学)

# 华大新高考联盟 2021 届高三 3 月教学质量测评

# 理科数学

**本试题卷共 4 页,23 题(含选考题)。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。**

**注意事项:**

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。**

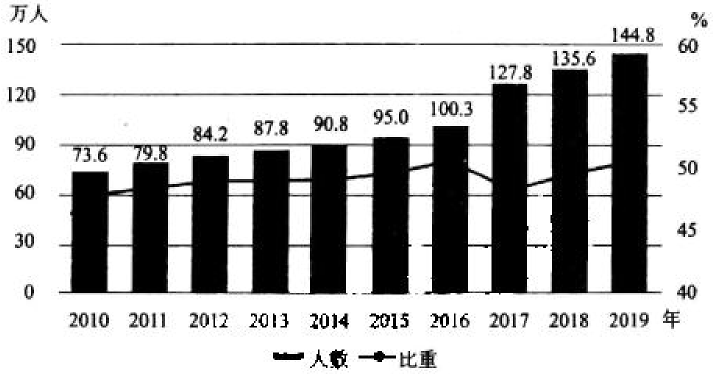
1. 设集合 $A=\{y|y=\sqrt{2x-1}\}$,$B=\{x|(3x-4)(x+1)>0\}$,则 $A\cap(\complement_{R}B)=$

A. $\left[0,\frac{4}{3}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right]$　　C. $\left[0,\frac{4}{3}\right)$　　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$

2. 若复数 $z$ 满足 $|z-2-3i|=5$,则复数 $z$ 的共轭复数不可能为

A. $5-7i$　　B. $-2-6i$　　C. $5+2i$　　D. $2-8i$

3. 根据国家统计局数据显示,我国 2010～2019 年研究生在校女生人数及所占比重如下图所示,则下列说法错误的是




2010～2019年研究生在校女生人数及所占比重

A. 2010～2019 年,我国研究生在校女生人数逐渐增加

B. 可以预测 2020 年,我国研究生在校女生人数将不低于 144 万

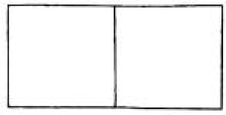
C. 2017 年我国研究生在校女生人数少于男生人数

D. 2019 年我国研究生在校总人数不超过 285 万

4. 设 $a=\log_{\frac{1}{3}}15$,$b=\log_{\frac{1}{6}}30$,$c=\log_{\frac{1}{7}}35$,则

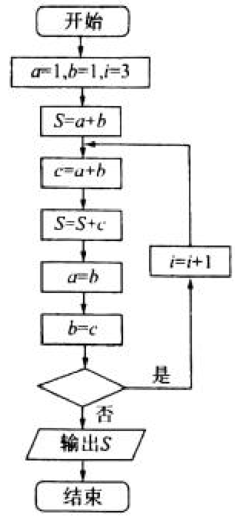
A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $b<c<a$

5. 小学数学在"认识图形"这一章节中，一般从生活实物入手，抽象出数学图形，在学生正确认识图形特征的基础上，通过习题帮助学生辨认所学图形；例如在小学数学课本中有这样一个 $2\times1$ 的方格表（如图所示），它由 2 个单位小方格组成，其中每个小方格均为正方形；若在这 $2\times1$ 方格表的 6 个顶点中任取 2 个顶点，则这 2 个顶点构成的线段长度不超过$\sqrt{2}$的概率为



A. $\frac{13}{15}$　　B. $\frac{11}{15}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 运行如图所示的程序框图，若为了输出第一个大于 50 的 $S$ 的值，则判断框中可以填




A. $b<13$?　　B. $b<21$?

C. $b<33$?　　D. $b<34$?

7. 已知$\triangle ABC$中，$AB=2BC=4$，$AC=2\sqrt{3}$，点 $M$ 在线段 $AC$ 上除 $A$，$C$ 的位置运动，现沿 $BM$ 进行翻折，使得线段 $AB$ 上存在一点 $N$，满足 $CN\perp$平面 $ABM$；若 $NB>\lambda$ 恒成立，则实数 $\lambda$ 的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$

C. 2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知边长为 4 的正方形 $ABCD$ 的对角线的交点为 $O$，以 $O$ 为圆心，6 为半径作圆；若点 $E$ 在圆 $O$ 上运动，则

A. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=72$

B. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=56$

C. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=36$

D. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=28$

9. 已知$\triangle ABC$中，$D$，$E$ 分别是线段 $BC$，$AC$ 的中点，$AD$ 与 $BE$ 交于点 $O$，且$\angle BOC=90^\circ$，若 $BC=2$，则$\triangle ABC$周长的最大值为

A. $2+2\sqrt{10}$　　B. $2+\sqrt{10}$　　C. $2+2\sqrt{5}$　　D. $2+4\sqrt{5}$

10. 过双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上一点 $P$ 作双曲线 $C$ 的切线 $l$，若直线 $OP$ 与直线 $l$ 的斜率均存在，且斜率之积为$\frac{2}{5}$，则双曲线 $C$ 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{35}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{30}}{5}$

11. 函数 $f(x)=5|\sin^2x-\sin|x||-1$ 在 $x\in\left[-\frac{5\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$上的零点个数为

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

12. 已知函数 $f(x)=x\ln x+2x$，若$\exists k\in\mathbf{Z}$，使得$\frac{f(x)+2k}{x}>k+1$ 在 $x\in(2,+\infty)$恒成立，则 $k$ 的最大值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 若实数 $x$、$y$ 满足$\begin{cases}3x+2\geqslant y,\\x+y\leqslant3,\\y\geqslant1,\end{cases}$则 $z=x-4y$ 的最大值为________.

14. 已知 $m\geqslant 1$，若函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-5x-3, x\leqslant m,\\ \log_2(x-1), x>m,\end{cases}$ 有且仅有 2 个零点，则实数 $m$ 的取值范围为________.

15. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_{10}=32, S_5=55$，则 $S_n=$________.

16. 已知抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F$，过点 $F$ 的直线与抛物线 $C$ 交于点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，若点 $P(x_2,-y_2)$，且 $S_{\triangle MPF}=10$，则直线 $MN$ 的斜率为________.

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**（一）必考题：共 60 分。**

17.（12 分）

已知等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，且 $a_3=\frac{1}{4}, S_3=\frac{7}{4}$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

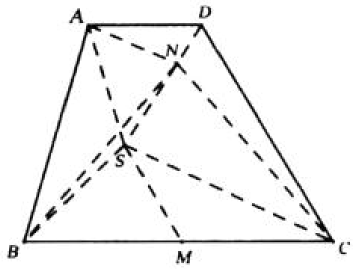
（2）若 $a_n>0$，求数列$\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$的前 $n$ 项和 $T_n$.

18.（12 分）

已知四棱锥 $S-ABCD$ 如图所示，其中$\triangle SAB$，$\triangle SBC$ 均为等边三角形，二面角 $A-BS-C$ 为直二面角，点 $M$ 为线段 $BC$ 的中点，点 $N$ 是线段 $SD$ 上靠近 $D$ 的三等分点，$BC$//平面 $SAD$.

（1）求证：$AD\perp SM$；

（2）若 $AD=\frac{1}{2}BC$，求直线 $AN$ 与平面 $BNC$ 所成角的正弦值.




19.（12 分）

在某媒体上有这样一句话：买车一时爽，一直养车一直爽，讲的是盲目买车的人最终会成为一个不折不扣的车奴；其实，买车之后的花费主要由加油费、停车费、保险费、保养费、维修费等几部分构成；为了了解新车车主 5 年以来的花费，打破年轻人买车的恐惧感，研究人员在 2016 年对 A 地区购买新车的 400 名车主进行跟踪调查，并将他们 5 年以来的新车花费统计如下表所示：

| 5 年花费（万元） | [3,5) | [5,7) | [7,9) | [9,11) | [11,13) | [13,15] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 60 | 100 | 120 | 40 | 60 | 20 |

（1）求这 400 名车主 5 年新车花费的平均数以及方差（同一区间的花费用区间的中点值替代）；

（2）以频率估计概率，假设 A 地区 2016 年共有 100000 名新车车主，若所有车主 5 年内新车花费 $\xi$ 可视为服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\mu,\sigma^2$ 分别为（1）中的平均数 $\bar{x}$ 以及方差 $s^2$，试估计 2016 年新车车主 5 年以来新车花费在[5.2,13.6)的人数；

（3）以频率估计概率，若从 2016 年 A 地区所有的新车车主中随机抽取 4 人，记花费在[9,15]的人数为 $X$，求 $X$ 的分布列以及数学期望.

参考数据：$\sqrt{2}\approx 1.4$；

若随机变量 $\xi$ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)=0.9544$，$P(\mu-3\sigma<\xi<\mu+3\sigma)=0.9974$.

20.(12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$ 的右焦点为 $F$,过点 $F$ 的直线 $l$ 与椭圆 $C$ 交于 $A,B$ 两点.

(1)若直线 $l$ 的倾斜角为 45°,求 $|AB|$ 的值;

(2)记椭圆 $C$ 的右顶点为 $D$,若点 $M(9,y_M)$,$N(9,y_N)$ 分别在直线 $AD,BD$ 上,求证:$FM\perp FN$.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x(me^x-1)+x$,其中 $m>0$.

(1)若函数 $f(x)$ 有 2 个极值点,求实数 $m$ 的取值范围;

(2)若关于 $x$ 的方程 $f(x)=a$ 仅有 1 个实数根,求实数 $a$ 的取值范围.

**(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多选,则按所做的第一题计分。**

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

已知平面直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t^2+\frac{1}{t^2}.\end{cases}$($t$ 为参数).以坐标原点为极点,$x$ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C'$ 的极坐标方程为 $\rho^2-16\rho\cos\alpha+32=0$.

(1)求曲线 $C$ 的普通方程以及曲线 $C'$ 的直角坐标方程;

(2)已知过原点的直线 $l$ 与曲线 $C$ 仅有 1 个交点 $M$,若 $l$ 与曲线 $C'$ 也仅有 1 个交点 $N$,求点 $M$ 的极坐标.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|ax-3|+a|x-2|$ 的图像关于原点对称.

(1)求不等式 $f(x)>x+2$ 的解集;

(2)若关于 $x$ 的不等式 $f(x)\leqslant mx^2+\frac{9}{4}$ 恒成立,求实数 $m$ 的取值范围.

机密★启用前(全国卷理科数学)

# 华大新高考联盟 2021 届高三 3 月教学质量测评

## 理科数学参考答案和评分标准

### 一、选择题

1.【答案】A

【命题意图】本题考查集合的表示、集合的运算、一元二次不等式的解法，考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$A=\{y|y=\sqrt{2x-1}\}=\{y|y\geqslant 0\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|(3x-4)(x+1)\leqslant 0\}=\left\{x\middle|-1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\right\}$，

则 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\left[0,\frac{4}{3}\right]$，故选 A 项.

2.【答案】C

【命题意图】本题考查复数的概念，考查考生逻辑推理的核心素养.

【解析】设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，则 $|x-2+(y-3)i|=5$，即 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$；观察可知，故选 C 项.

3.【答案】D

【命题意图】本题考查统计图表、样本的数字特征，考查考生数学运算、逻辑推理、数学建模的核心素养.

【解析】2010～2019 年，我国研究生在校女生人数逐渐增加，故 A 项正确；由于 2010～2019 年，我国研究生在校女生人数逐年增加，且 2019 年人数为 144.8 万，故 B 项正确；2017 年我国研究生在校女生人数所占比重为 48.4%，不足一半，故 C 项正确；因为 $\frac{144.8}{0.506}\approx 286.166$，故 2019 年我国研究生在校总人数超过 285 万，故 D 项错误.

4.【答案】A

【命题意图】本题考查对数的运算性质、对数函数的单调性，考查考生逻辑推理、数学抽象、数学建模的核心素养.

【解析】依题意，$a=-\log_3 15=-1-\log_3 5$，$b=\log_{\frac{1}{6}}30=-\log_6 30=-1-\log_6 5$，

$c=\log_{\frac{1}{7}}35=-\log_7 35=-1-\log_7 5$；因为 $\log_3 5>\log_6 5>\log_7 5$，故 $a<b<c$，故选 A 项.

5.【答案】B

【命题意图】本题考查数学文化、古典概型的概率，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模的核心素养.

【解析】若从 6 个顶点中任取 2 个，则可以构造出 15 条线段，其中长度超过 $\sqrt{2}$ 的线段有 4 条(其中长度为 2 的有 2 条，长度为 $\sqrt{5}$ 的有 2 条)，故所求概率为 $1-\frac{4}{15}=\frac{11}{15}$，故选 B 项.

6.【答案】B

【命题意图】本题考查算法与程序框图，考查数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】运行该程序，$S=2$；第一次，$c=2$，$S=4$，$a=1$，$b=2$；第二次，$c=3$，$S=7$，$a=2$，$b=3$；第三次，$c=5$，$S=12$，$a=3$，$b=5$；第四次，$c=8$，$S=20$，$a=5$，$b=8$；第五次，$c=13$，$S=33$，$a=8$，$b=13$；第六次，$c=21$，$S=54$，$a=13$，$b=21$；故判断框中可以填 $b<21$?，故选 B.

7.【答案】A

【命题立意】本题考查空间线面的位置关系，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

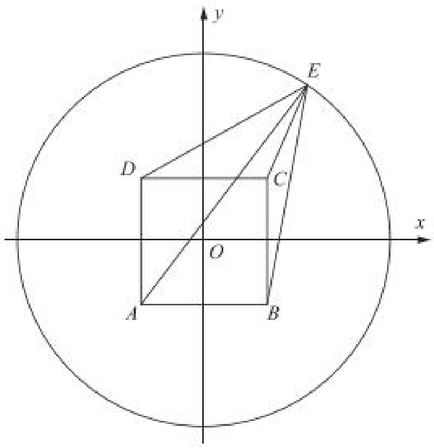
【解析】易知要满足 $CN\perp$ 平面 $ABM$；有两个极限状态，第一是 $BM$ 为 $\angle ABC$ 的角平分线时，此时 $NB=2$，

第二是点 $M$ 与点 $A$ 重合时，此时 $NB=1$；故 $NB\in(1,2)$，则实数 $\lambda$ 的最大值为 1，故选 A 项.

8.【答案】B

【命题意图】本题考查平面向量的坐标运算、向量的数量积，考查考生逻辑推理、直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】作出图形如下所示，以 $O$ 为坐标原点，线段 $BC$、$AB$ 的垂直平分线分别为 $x$、$y$ 轴建立平面直角坐标系 $xOy$；观察可知，$A(-2,-2)$，$B(2,-2)$，$C(2,2)$，$D(-2,2)$，设 $E(x,y)$，则 $x^2+y^2=36$，故 $\overrightarrow{EA}=(-2-x,-2-y)$，$\overrightarrow{EB}=(2-x,-2-y)$，$\overrightarrow{EC}=(2-x,2-y)$，$\overrightarrow{ED}=(-2-x,2-y)$，故 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EA}=(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{ED})=4\overrightarrow{EO}^2=144$，$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=56$，故选 B 项.




9.【答案】A

【命题意图】本题考查余弦定理、基本不等式，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $\angle BOC=90^\circ$，故 $OD=\frac{1}{2}BC=1$，则 $AD=3OD=3$；

而 $AD^2=\frac{1}{4}(AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A)=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}\right)=\frac{1}{4}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$，故 $AB^2+AC^2=2AD^2+\frac{1}{2}BC^2=20$，则 $AB+AC\leqslant\sqrt{2(AB^2+AC^2)}=2\sqrt{10}$，当且仅当 $AB=AC$ 时等号成立，故 $\triangle ABC$ 周长的最大值为 $2+2\sqrt{10}$，故选 A 项.

10.【答案】C

【命题意图】本题考查双曲线的方程与性质，考查考生直观想象、数学运算的核心素养.

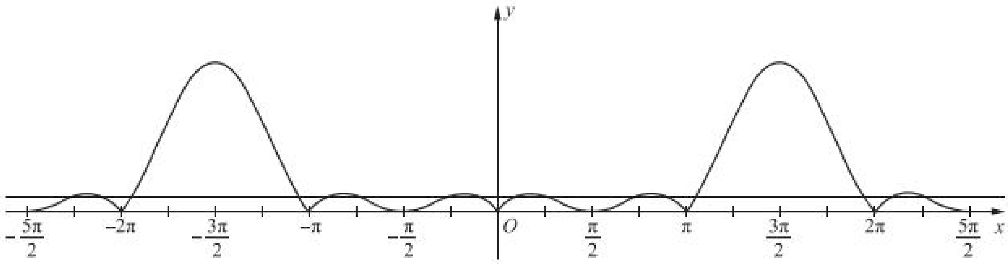
【解析】设 $P(x_0,y_0)$；由于双曲线 $C$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$，故切线 $l$ 的斜率 $k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$；因为 $k\cdot k_{OP}=\frac{2}{5}$，则 $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\cdot\frac{y_0}{x_0}=\frac{2}{5}$，则 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{5}$，即双曲线 $C$ 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}$，故选 C.

11.【答案】C

【命题意图】本题考查三角函数的图像性质，考查考生直观想象、逻辑推理的核心素养.

【解析】解法一：令 $f(x)=0$，则 $5\left|\sin^2x-\sin|x|\right|-1=0$，故 $\left|\sin^2x-\sin|x|\right|=\frac{1}{5}$，注意到 $g(x)=\left|\sin^2x-\sin|x|\right|$ 为偶函数，故只需研究曲线 $y=g(x)$，$x\in\left[0,\frac{5}{2}\pi\right]$ 与直线 $y=\frac{1}{5}$ 的交点个数即可；此时 $g(x)=|\sin^2x-\sin x|=|\sin x(\sin x-1)|$；当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$，$y=\sin^2x-\sin x$ 单调递减，且 $y<0$，故 $g(x)$ 单调递增，同理可得，当 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$ 时，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ 时，$g(x)$ 单调递减，当 $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，$g(x)$ 单调递增，当 $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 时，$g(x)$ 单调递减；其中 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(\pi)=g(2\pi)=0$，$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$；易知当 $x\geqslant0$ 时，$g(x+2\pi)=g(x)$，故 $2\pi$ 为 $g(x)$ 的周期；作出函数 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 上的图像如下所示，故曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\frac{1}{5}$ 有

16 个交点,即函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 上的零点个数为 16,故选 C 项.




解法二:令 $f(x)=0$,则 $5\left|\sin^2x-\sin|x|\right|-1=0$,故 $\left|\sin^2x-\sin|x|\right|=\frac{1}{5}$,注意到 $g(x)=\left|\sin^2x-\sin|x|\right|$ 为偶函数,故只需研究曲线 $y=g(x)$,$x\in\left[0,\frac{5}{2}\pi\right]$ 与直线 $y=\frac{1}{5}$ 的交点个数即可;

$\sin^2x-\sin x=\frac{1}{5}$(1)或者 $\sin^2x-\sin x=-\frac{1}{5}$(2)

解(1)有 $\sin x=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$($>1$,舍)或 $\sin x=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\in(-1,0)$ 共有二解;

解(2)有 $\sin x=\frac{5+\sqrt{5}}{10}\in(0,1)$ 或 $\sin x=\frac{5-\sqrt{5}}{10}\in(0,1)$ 共有六解,

$\therefore x\in\left[0,\frac{5\pi}{2}\right]$,$f(x)$ 共有 8 个零点.

故 $f(x)$ 共有 16 个零点.

12.【答案】C

【命题立意】本题考查利用导数研究函数的性质,考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】依题意,$k<\frac{x+x\ln x}{x-2}$,令 $h(x)=\frac{x+x\ln x}{x-2}$,则 $h'(x)=\frac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$. 令 $g(x)=x-4-2\ln x$,$g'(x)=1-\frac{2}{x}$,$\therefore x>2$ 时,$g'(x)>0$,即 $g(x)$ 单调递增,

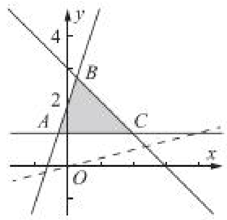
$\because g(8)=4-2\ln 8=\ln e^4-\ln 8^2<0$,$g(9)=5-2\ln 9=\ln e^5-\ln 9^2>0$,设 $x-4-2\ln x=0$ 并记其零点为 $x_0$,故 $8<x_0<9$,且 $\ln x_0=\frac{x_0-4}{2}$,所以当 $2<x<x_0$ 时,$g(x)<0$,即 $h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减;当 $x>x_0$ 时,$g(x)>0$ 即 $h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,所以 $h_{\min}(x)=h(x_0)=\frac{x_0+x_0\ln x_0}{x_0-2}=\frac{x_0+x_0\left(\frac{x_0-4}{2}\right)}{x_0-2}=\frac{x_0}{2}$,因此 $k<\frac{x_0}{2}$,由于 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $8<x_0<9$,即 $4<\frac{x_0}{2}<\frac{9}{2}$,所以 $k_{\max}=4$,故选 C 项.

二、填空题

13.【答案】$-2$

【命题立意】本题考查二元一次不等式组与平面区域、线性规划,考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

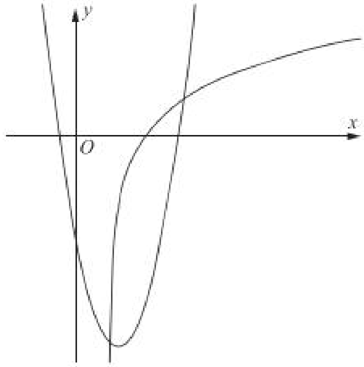
【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图阴影部分所示;观察可知,当直线 $z=x-4y$ 过点 $C(2,1)$ 时,$z$ 有最大值 $-2$.




14.【答案】$[1,2)\cup[3,+\infty)$

【命题立意】本题考查分段函数、函数的图像与性质,考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】令 $2x^2-5x-3=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=3$；在同一直角坐标系中分别作出 $y=2x^2-5x-3$，$y=\log_2(x-1)$ 的图像如下所示；观察可知，实数 $m$ 的取值范围为 $1\leqslant m<2$ 或 $m\geqslant 3$.




15.【答案】$\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$

【命题意图】本题考查等差数列的基本运算、考查考生数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】依题意，$S_5=5a_3=55$，解得 $a_3=11$，$\begin{cases}a_{10}=a_1+9d=32,\\a_3=a_1+2d=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=5,\\d=3,\end{cases}$ 故 $a_n=3n+2$，$S_n=\frac{(5+3n+2)n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$.

16.【答案】$\pm\frac{2}{5}$

【命题立意】本题考查抛物线的方程、直线与抛物线综合性问题，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】设直线 $MN$ 的斜率为 $k$，则直线 $MN$：$y=k(x-1)$；联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 $y$ 得，$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，则 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$x_1x_2=1$，故 $|MF|=x_1+1$，$|PF|=x_2+1$；设直线 $MN$ 的倾斜角为 $\alpha$，则 $\tan\alpha=k$，故 $\sin\angle MFP=|\sin(\pi-2\alpha)|=|\sin2\alpha|=\frac{2|k|}{k^2+1}$，

故 $S_{\triangle MPF}=\frac{1}{2}(x_1+1)(x_2+1)|\sin2\alpha|=\frac{1}{2}[x_1x_2+(x_1+x_2)+1]\cdot\frac{2|k|}{k^2+1}=\frac{4}{|k|}$；令 $\frac{4}{|k|}=10$，解得 $k=\pm\frac{2}{5}$.

**三、解答题**

17.【命题意图】本题考查等比数列的基本公式、错位相减法，考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，则 $a_1+a_2+a_3=\frac{1}{4q^2}+\frac{1}{4q}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，

即 $6q^2-q-1=0$，解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $q=-\frac{1}{3}$； ………………………………………… (2 分)

若 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_n=a_3q^{n-3}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$， ………………………………………… (4 分)

若 $q=-\frac{1}{3}$，则 $a_n=a_3q^{n-3}=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-3}$； ………………………………………… (6 分)

(2)由(1)得，$\frac{n}{a_n}=n\cdot2^{n-1}$， ………………………………………… (7 分)

故 $T_n=1\cdot2^0+2\cdot2^1+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1}$，

$2T_n=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$， ………………………………………… (9 分)

两式相减可得 $-T_n=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=2^n-1-n\cdot2^n$，

故 $T_n=(n-1)\cdot2^n+1$. ………………………………………… (12 分)

18.【命题意图】本题考查空间线面的位置关系、向量法求空间角，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)因为 $BC$∥平面 $SAD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$平面 $SAD=AD$，

所以 $BC/\!/AD$；……………………………………………………………………………………（2 分）

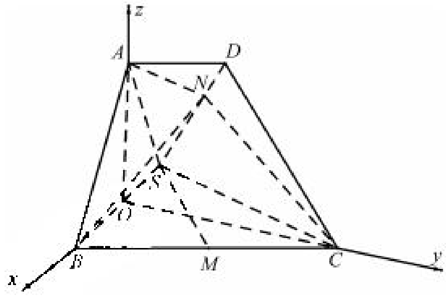
因为$\triangle SBC$为等边三角形，且$BM=CM$，故$SM\perp BC$，则$SM\perp AD$；………………………（4 分）

（2）取$SB$的中点$O$，连接$AO$，$CO$，因为$\triangle SAB$，$\triangle SBC$均为等边三角形，

故$AO\perp SB$，$CO\perp SB$，因为二面角$A-BS-C$为直二面角，故平面$ABS\perp$平面$CBS$，

因为$AO\subset$平面$ABS$，平面$ABS\cap$平面$CBS=BS$，故$AO\perp$平面$SBC$；…………………………（5 分）

故以$O$为坐标原点，$OB$，$OC$，$OA$所在直线分别为$x$，$y$，$z$轴建立如图所示空间直角坐标系；




不妨设$AB=2$，则$S(-1,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A(0,0,\sqrt{3})$，

所以$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，

所以$D\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，

所以$\overrightarrow{SN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}=\left(\frac{1}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以$N\left(-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，………………………………（7 分）

所以$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CN}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，…………………（8 分）

设平面$BNC$的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CN}=0,\end{cases}$故$\begin{cases}-x+\sqrt{3}y=0,\\ -\frac{2}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}y+\frac{2\sqrt{3}}{3}z=0,\end{cases}$

则$\begin{cases}x=\sqrt{3}y,\\ z=2y,\end{cases}$令$y=1$，则$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,2)$为平面$BNC$的一个法向量；……………………（10 分）

则直线$AN$与平面$BNC$所成角正弦值$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{15}}{20}$．…………………………（12 分）

19.【命题意图】本题考查样本的数字特征、正态分布、离散型随机变量的分布列与期望，考查考生数学建模、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】（1）依题意，整理表格数据如下：

| 5 年花费（万元） | [3,5) | [5,7) | [7,9) | [9,11) | [11,13) | [13,15] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 人数 | 60 | 100 | 120 | 40 | 60 | 20 |
| 频率 | 0.15 | 0.25 | 0.3 | 0.1 | 0.15 | 0.05 |

依题意，$\bar{x}=4\times0.15+6\times0.25+8\times0.3+10\times0.1+12\times0.15+14\times0.05=8$，…………………（2 分）

$s^2=0.15\times(-4)^2+0.25\times(-2)^2+0.1\times2^2+0.15\times4^2+0.05\times6^2=8$；……………………（4 分）

（2）由（1）可知，$\mu=8$，$\sigma^2=8$，$\sigma=2\sqrt{2}\approx2.8$；

$P(5.2\leqslant\xi<13.6)=P(\mu-\sigma\leqslant\xi<\mu+2\sigma)=\frac{0.9544+0.6826}{2}=0.8185$，………………………（6 分）

故所求人数为$100000\times0.8185=81850$；…………………………………………………………（7 分）

(3)依题意，$X\sim B\left(4,\frac{3}{10}\right)$，

故 $P(X=0)=\left(\frac{7}{10}\right)^4=\frac{2401}{10000}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{4116}{10000}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2=\frac{2646}{10000}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{756}{10000}$，

$P(X=4)=\left(\frac{3}{10}\right)^4=\frac{81}{10000}$， ……………………………………………………………… (10 分)

| X | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{2401}{10000}$ | $\frac{4116}{10000}$ | $\frac{2646}{10000}$ | $\frac{756}{10000}$ | $\frac{81}{10000}$ |

则 $E(X)=4\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ……………………………………………………………… (12 分)

20.【命题意图】本题考查椭圆的方程、直线与椭圆的综合性问题，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$F(1,0)$，直线 $l:y=x-1$；……………………………………………………… (1 分)

联立 $\begin{cases}8x^2+9y^2-72=0,\\ y=x-1\end{cases}$ 故 $8x^2+9(x-1)^2-72=0$，

整理得 $17x^2-18x-63=0$，$\Delta>0$；

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $x_1+x_2=\frac{18}{17}$，$x_1x_2=-\frac{63}{17}$， …………………………………… (3 分)

故 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{96}{17}$； ………………………… (5 分)

(2)当直线 $l$ 的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，可以求得 $M,N$ 两点坐标分别为 $M(9,8)$，$N(9,-8)$或 $M(9,-8)$，$N(9,8)$，又 $F(1,0)$，

故 $FM,FN$ 的斜率之积为 $k_{FM}\cdot k_{FN}=\frac{8-0}{9-1}\cdot\frac{-8-0}{9-1}=-1$，故 $FM\perp FN$； ………………………… (6 分)

当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$

消去 $y$ 整理得 $(8+9k^2)x^2-18k^2x+9k^2-72=0$，

故 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{8+9k^2}$，$x_1x_2=\frac{9k^2-72}{8+9k^2}$， ……………………………………………………… (8 分)

$y_1y_2=k(x_1-1)\cdot k(x_2-1)=k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]$，

由 $D,A,M$ 共线得，$\frac{y_1-0}{x_1-3}=\frac{y_M-0}{9-3}$，解得 $y_M=\frac{6y_1}{x_1-3}$，

由 $D,B,N$ 共线得，$\frac{y_2-0}{x_2-3}=\frac{y_N-0}{9-3}$，解得 $y_N=\frac{6y_2}{x_2-3}$， ……………………………………… (10 分)

故 $FM,FN$ 的斜率之积为 $k_{FM}\cdot k_{FN}=\frac{y_M-0}{9-1}\cdot\frac{y_N-0}{9-1}=\frac{y_My_N}{64}=\frac{9y_1y_2}{16(x_1-3)(x_2-3)}$

$=\frac{9k^2[x_1x_2-(x_1+x_2)+1]}{16[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]}=\frac{9k^2\left(\frac{9k^2-72}{8+9k^2}-\frac{18k^2}{8+9k^2}+1\right)}{16\left(\frac{9k^2-72}{8+9k^2}-\frac{3\times18k^2}{8+9k^2}+9\right)}=-1$，故 $FM\perp FN$；

综上所述，$FM\perp FN$. ………………………………………………………………………… (12 分)

21.【命题意图】本题考查利用导数研究函数的性质，考查考生逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，$f'(x)=2me^{2x}-e^x+1$，………………………………………………………… (1 分)

令 $f'(x)=0$，则 $\Delta=1-8m$；

当 $m\geqslant\frac{1}{8}$ 时，$\Delta\leqslant0$，此时 $f'(x)\geqslant0$，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值点，不合题意；……
………………………………………………………………………………………………… (3 分)

当 $0<m<\frac{1}{8}$ 时，$\Delta>0$，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=\frac{1\pm\sqrt{1-8m}}{4m}$，则 $x_1=\ln\frac{1-\sqrt{1-8m}}{4m}$，$x_2=\ln\frac{1+\sqrt{1-8m}}{4m}$，

则当 $x\in(-\infty,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1,x_2)$，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，符合题意；

综上所述，实数 $m$ 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{8}\right)$；……………………………………………………… (5 分)

(2)依题意，$e^x(me^x-1)+x=a$，记 $g(x)=e^x(me^x-1)+x-a$，$g'(x)=f'(x)$；

(i)由(1)可知当 $m\geqslant\frac{1}{8}$ 时，$g'(x)\geqslant0$，则函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

可知当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，故当 $m\geqslant\frac{1}{8}$ 时，函数 $g(x)$ 恰有 1 个零点，此时 $a\in\mathbf{R}$；…………………………………………………………………………………………… (6 分)

(ii)当 $0<m<\frac{1}{8}$ 时，$g(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 上单调递增，在 $(x_1,x_2)$ 上单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(x_1)=2me^{2x_1}-e^{x_1}+1=g'(x_2)=2me^{2x_2}-e^{x_2}+1=0$，则 $m=\frac{e^{x_1}-1}{2e^{2x_1}}=\frac{e^{x_2}-1}{2e^{2x_2}}$，

所以 $[g(x)]_{极大值}=g(x_1)=me^{2x_1}-e^{x_1}+x_1-a=-\frac{e^{x_1}}{2}+x_1-\frac{1}{2}-a$，

$[g(x)]_{极小值}=g(x_2)=me^{2x_2}-e^{x_2}+x_2-a=-\frac{e^{x_2}}{2}+x_2-\frac{1}{2}-a$，……………………………… (8 分)

因为当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

故只需 $g(x_1)<0$ 或 $g(x_2)>0$；……………………………………………………………………… (9 分)

令 $h(x)=-\frac{e^x}{2}+x-\frac{1}{2}$，则 $h'(x)=-\frac{e^x}{2}+1$，

故当 $x\in(-\infty,\ln2)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(\ln2,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，…………………………… (10 分)

又 $x_1=\ln\frac{1-\sqrt{1-8m}}{4m}=\ln\frac{2}{1+\sqrt{1-8m}}$，$x_2=\ln\frac{2}{1-\sqrt{1-8m}}$，

又 $0<m<\frac{1}{8}$，故 $\sqrt{1-8m}\in(0,1)$，故 $x_1\in(0,\ln2)$，$x_2\in(\ln2,+\infty)$，…………………………… (11 分)

所以 $h(x_1)\in\left(-1,-\frac{3}{2}+\ln2\right)$，$h(x_2)\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}+\ln2\right)$，故 $a\geqslant-\frac{3}{2}+\ln2$；

综上所述，实数 $a$ 的取值范围为 $\left[-\frac{3}{2}+\ln2,+\infty\right)$. ……………………………………………… (12 分)

22.【解析】(1)易知 $t+\frac{1}{t}\geqslant2$ 或 $t+\frac{1}{t}\leqslant-2$，当且仅当 $t=\pm1$ 时等号成立；

而曲线 $C$：$\begin{cases}x=t+\frac{1}{t},\\ y=t^2+\frac{1}{t^2},\end{cases}$ 故曲线 $C$ 的普通方程 $y=x^2-2(x\leqslant-2$ 或 $x\geqslant2)$；……………………… (3 分)

而曲线 $C'$：$\rho^2-16\rho\cos\alpha+32=0$，

故曲线 $C'$ 的直角坐标方程 $x^2+y^2-16x+32=0$；…………（5 分）

(2)易知直线 $l$ 的斜率存在，设直线 $l$：$kx-y=0$；

而圆 $C'$：$(x-8)^2+y^2=32$，故 $\dfrac{|8k|}{\sqrt{1+k^2}}=4\sqrt{2}$，解得 $k=\pm1$；…………（7 分）

联立 $\begin{cases}y=\pm x,\\ y=x^2-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\ y=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=2,\end{cases}$ …………（9 分）

故点 $M$ 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 或 $\left(2\sqrt{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$. …………（10 分）

注：极坐标不唯一，正确的均给分.

23.【命题意图】本题考查绝对值不等式的解法、函数的图像与性质，考查考生直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养.

【解析】(1)依题意，函数 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(0)=3+2a=0$，解得 $a=-\dfrac{3}{2}$；

故 $f(x)>x+2$ 等价于 $\left|\dfrac{3}{2}x+3\right|-\left|\dfrac{3}{2}x-3\right|>x+2(*)$；…………（1 分）

当 $x<-2$ 时，$(*)$ 式化为 $-\dfrac{3}{2}x-3+\dfrac{3}{2}x-3>x+2$，解得 $x<-8$，故 $x<-8$； …………（2 分）

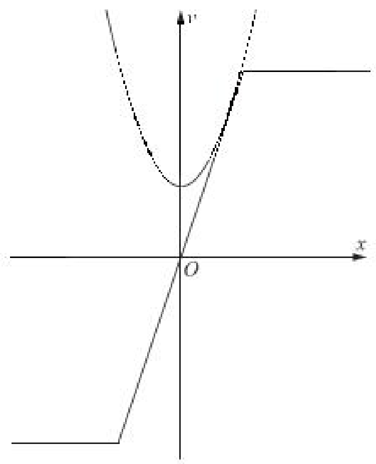
当 $-2\leqslant x\leqslant2$ 时，$(*)$ 式化为 $\dfrac{3}{2}x+3+\dfrac{3}{2}x-3>x+2$，解得 $x>1$，故 $1<x\leqslant2$； …………（3 分）

当 $x>2$ 时，$(*)$ 式化为 $\dfrac{3}{2}x+3-\dfrac{3}{2}x+3>x+2$，解得 $x<4$，故 $2<x<4$；…………（4 分）

故不等式的解集为 $\{x|x<-8$ 或 $1<x<4\}$；…………（5 分）

(2)作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示；因为 $y=mx^2+\dfrac{9}{4}$ 的图像过定点 $\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$，故 $m\leqslant0$ 不合题意，舍去；

…………（7 分）




当 $m>0$ 时，临界状态为 $y=mx^2+\dfrac{9}{4}$ 与直线 $y=3x$ 相切(如图)； …………（8 分）

联立 $\begin{cases}y=mx^2+\dfrac{9}{4},\\ y=3x,\end{cases}$ 故 $mx^2-3x+\dfrac{9}{4}=0$，解得 $\Delta=9-4\times\dfrac{9}{4}m=0$，故 $m=1$，

故实数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …………（10 分）

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。


**关注后获取更多资料：**

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》