

绝密★启用前

长沙一中 长郡中学

师大附中 雅礼中学

2020 届高三四校（线上）联考

数 学（文科）

2020.2

命题学校：雅礼中学 命题人： 

审题学校：师大附中 审题人： 

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、考生号、座号填写在相应位置，认真核对条形码上的姓名、考生号和座号，并将条形码粘贴在指定位置上。
2. 选择题答案必须使用 2B 铅笔（按填涂样例）正确填涂；非选择题答案必须使用 0.5 毫米黑色签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。保持卡面清洁，不折叠、不破损。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{N} \mid -x^2 + x + 2 \geq 0\}$ ，则满足条件  $A \cup B = A$  的集合  $B$  的个数为  
A. 3                      B. 4                      C. 7                      D. 8
2. 已知  $i$  为虚数单位， $a, b \in \mathbf{R}$ ，复数  $\frac{1+i}{2-i} - i = a + bi$ ，则  $a - bi =$   
A.  $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$               B.  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$               C.  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$               D.  $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$
3. 已知  $A(1, 2)$ ， $B(2, 3)$ ， $C(-1, m)$ ，若  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$ ，则  $\overrightarrow{AC}^2 =$   
A. 6                      B.  $2\sqrt{5}$                   C. 16                      D. 20
4. 已知命题  $p$ ：“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, \frac{1}{x_0+1} > 0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbf{R}, \frac{1}{x+1} \leq 0$ ”；命题  $q$ ：“ $x < 2020$ ”的一个充分不必要条件是“ $x < 2019$ ”，则下列命题为真命题的是  
A.  $p \wedge q$     B.  $\neg q$   
C.  $p \vee (\neg q)$                                       D.  $(\neg p) \wedge q$

数学（文科）试题（第 1 页，共 5 页）

5. 分形几何是美籍法国数学家芒德勃罗在 20 世纪 70 年代创立的一门数学新分支，其中的“谢尔宾斯基”图形的作法是：先作一个正三角形，挖去一个“中心三角形”（即以原三角形各边的中点为顶点的三角形），然后在剩下的每个小正三角形中又挖去一个“中心三角形”。按上述方法无限连续地作下去直到无穷，最终所得的极限图形称为“谢尔宾斯基”图形（如图所示），按上述操作 7 次后，“谢尔宾斯基”图形中的小正三角形的个数为

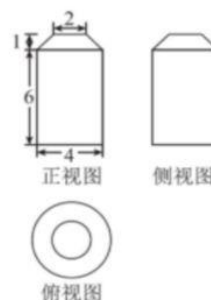


- A.  $3^5$                       B.  $3^6$                       C.  $3^7$                       D.  $3^8$

6. 将函数  $f(x) = 2\sin \pi x - 1$  的图象向左平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \frac{1}{2}$ ) 个单位长度后得到函数  $g(x)$  的图象，若使  $|f(a) - g(b)| = 4$  成立的  $a, b$  有  $|a - b|_{\min} = \frac{3}{4}$ ，则下列直线中可以是函数  $y = g(x)$  图象的对称轴的是

- A.  $x = -\frac{1}{4}$                       B.  $x = \frac{1}{2}$   
C.  $x = \frac{3}{4}$                       D.  $x = \frac{5}{4}$

7. 《海岛算经》中有这样一个问题，大意为：某粮行用芦席围成一个粮仓装满米，该粮仓的三视图如图所示（单位：尺，1 尺  $\approx$  0.33 米），已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，则估算出该粮仓存放的米约为



- A. 43 斛  
B. 45 斛  
C. 47 斛  
D. 49 斛

8. 已知点  $G$  在  $\triangle ABC$  内，且满足  $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \mathbf{0}$ ，现在  $\triangle ABC$  内随机取一点，此点取自  $\triangle GAB$ 、 $\triangle GAC$ 、 $\triangle GBC$  的概率分别记为  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$ ，则

- A.  $P_1 = P_2 = P_3$                       B.  $P_3 > P_2 > P_1$                       C.  $P_1 > P_2 > P_3$                       D.  $P_2 > P_1 > P_3$

9. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点为  $F(c, 0)$ ，点  $A, B$  分别在直线

$x = -\frac{a^2}{c}$  和双曲线  $C$  的右支上，若四边形  $OABF$ （其中  $O$  为坐标原点）为菱形且其面积为  $3\sqrt{15}$ ，则  $a =$

- A.  $\sqrt{3}$                       B.  $\sqrt{5}$                       C. 2                      D.  $\sqrt{6}$

10. 当  $x$  为实数时， $\text{trunc}(x)$  表示不超过  $x$  的最大整数，如  $\text{trunc}(3.1) = 3$ 。已知函数  $f(x) = \text{trunc}(x)$ ，函数  $g(x)$  满足  $g(x) = g(6-x)$ 、 $g(1+x) = g(1-x)$ ，且  $x \in [0, 3]$  时，

$g(x) = |x^2 - 2x|$ , 则方程  $f(x) = g(x)$  的所有根的个数为

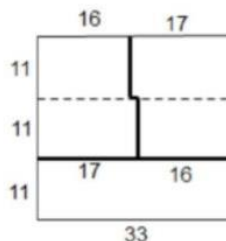
- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

11. 对四位数  $\overline{abcd}$  ( $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$ ), 若  $a > b, b < c, c > d$ , 称  $\overline{abcd}$  为“吉祥数”, 则“吉祥数”的个数为

- A. 1695                      B. 1696  
C. 1697                      D. 1698

12. 如图所示, 将  $33 \times 33$  方格纸中每个小方格染三种颜色之一, 使得每种颜色的小方格的个数相等. 若相邻两个小方格的颜色不同, 称他们的公共边为“分割边”, 则分割边条数的最小值为

- A. 33  
B. 56  
C. 64  
D. 78



二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

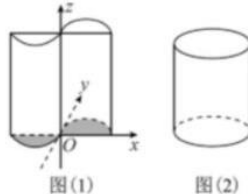
13. 过抛物线  $C: y = x^2$  上的一点  $M$  (非顶点) 作  $C$  的切线与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $A, B$  两点,

则  $\frac{|MA|}{|MB|} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 我国古代数学家祖暅提出原理: “幂势既同, 则积不容异”. 其中“幂”是截面积, “势”是几何体的高. 原理的意思是: 夹在两个平行平面间的两个几何体, 被任一平行于这两个平行平面的平面所截, 若所截的两个截面的面积恒相等, 则这两个几何体的体积相等. 如图 (1), 函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [-2, 0) \\ \sqrt{1 - (x-1)^2}, & x \in (0, 2] \end{cases}$$

的图象与  $x$  轴围成一个封闭区域  $A$  (阴影部分), 将区域  $A$  (阴影部分) 沿  $z$  轴的正方向上移 6 个单位, 得到一几何体. 现有一个与之等高的底面为椭圆的柱体如图 (2) 所示, 其底面积与区域  $A$  (阴影部分) 的面积相等, 则此柱体的体积为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .



15. 已知变量  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} y \geq 0 \\ x + 2y - 8 \leq 0 \\ 2x + y - 6 \geq 0 \end{cases}$ , 在实数  $x, y$  中插入 7 个实数, 使这 9 个数构成等差数列  $\{a_n\}$  的前 9 项, 则  $a_1 = x, a_9 = y$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 13 项和的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

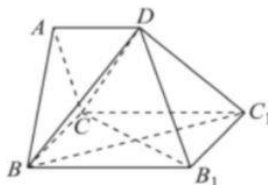
16. 已知四面体有五条棱长为 3, 且外接球半径为 2. 动点  $P$  在四面体的内部或表面,  $P$  到四个面的距离之和记为  $s$ . 已知动点  $P$  在  $P_1, P_2$  两处时,  $s$  分别取得最小值和最大值, 则线段  $P_1P_2$  长度的最小值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

如图, 多面体  $ABC-DB_1C_1$  是正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  沿平面  $DB_1C_1$  切除一部分所得,  $BC=CC_1=1$ , 点  $D$  为  $AA_1$  的中点.

- (I) 求证:  $BC_1 \perp$  平面  $B_1CD$ ;  
(II) 求点  $B_1$  到平面  $BCD$  的距离.



18. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的右焦点为  $F$ , 左顶点为  $A$ , 离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且

经过圆  $O: x^2 + y^2 - 2y = 0$  的圆心. 过点  $F$  作不与坐标轴重合的直线  $l$  和该椭圆交于  $M, N$  两点, 且直线  $AM, AN$  分别与直线  $x=2$  交于  $P, Q$  两点.

- (I) 求椭圆的方程;  
(II) 证明:  $\triangle PFQ$  为直角三角形.

19. (本小题满分 12 分)

定义: 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的差都大于或等于 2, 则称这个数列为“ $D$  数列”.

- (I) 若首项为 1 的等差数列  $\{a_n\}$  的每一项均为正整数, 且数列  $\{a_n\}$  为“ $D$  数列”,

其前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_n < n^2 + 2n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

- (II) 已知等比数列  $\{a_n\}$  的每一项均为正整数, 且数列  $\{a_n\}$  为“ $D$  数列”,  $a_2 - a_1 < 3$ ,

设  $b_n = \frac{2 \times 6^n}{(n+1) \cdot a_n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), 试判断数列  $\{b_n\}$  是否为“ $D$  数列”, 并说明理由.

20. (本小题满分 12 分)

高尔顿板是英国生物统计学家高尔顿设计用来研究随机现象的模型, 在一块木板上钉着若干排相互平行但相互错开的圆柱形小木块, 小木块之间留有适当的空隙作为通道, 前面挡有一块玻璃, 让一个小球从高尔顿板上方的通道口落下, 小球在下落的过程中与层层小木块碰撞, 且等可能向左或向右滚下, 最后掉入高尔顿板下方的某一球槽内.

如图所示的小木块中, 上面 7 层为高尔顿板, 最下面一层为改造的高尔顿板, 小球从通道口落下, 第一次与第 2 层中间的小木块碰撞, 以  $\frac{1}{2}$  的概率向左或向右滚下, 依次经过

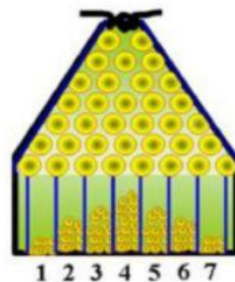


图 2

7 次与小木块碰撞, 最后掉入编号为 1, 2, ..., 6 的球槽内. 例如小球要掉入 3 号球槽, 则在前 6 次碰撞中有 2 次向右 4 次向左滚到第 7 层的第 3 个空隙处, 再以  $\frac{1}{2}$  的概率向

右滚下，或在前 6 次碰撞中有 3 次向右 3 次向左滚到第 7 层的第 4 个空隙处，再以  $\frac{1}{2}$  的概率向左滚下。

(I) 若进行一次高尔顿板试验，求小球落入第 7 层第 6 个空隙处的概率；

(II) 小明同学在研究了高尔顿板后，利用该图中的高尔顿板来到社团文化节上进行盈利性“抽奖”活动，8 元可以玩一次高尔顿板游戏，小球掉入  $X$  号球槽得到的奖金为  $\xi$  元。其中  $\xi = |20 - 5X|$ 。

(i) 求  $X$  的分布列；

(ii) 高尔顿板游戏火爆进行，很多同学参加了游戏，你觉得小明同学能盈利吗？

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^2 + ax - \frac{a}{x}$  ( $a \in \mathbf{R}$ )。

(I) 当  $a=1$  且  $x > -1$  时，求函数  $f(x)$  的单调区间；

(II) 当  $a > \frac{e}{e^2+1}$  时，若函数  $g(x) = f(x) - x^2 - \ln x$  的两个极值点分别为  $x_1, x_2$ ，证

明： $0 < |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{4}{e^2+1}$ 。

请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题号涂黑。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中，曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 6 + \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数)，以坐标

原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线  $C_2$  的极坐标方程为

$$\rho = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{1+9\sin^2\theta}}.$$

(I) 求曲线  $C_1$  的普通方程和  $C_2$  的直角坐标方程；

(II) 若  $M, N$  分别为曲线  $C_1$  和曲线  $C_2$  上的动点，求  $|MN|$  的最大值。

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5：不等式选讲

已知函数  $f(x) = |2x-7| + |2x-5|$ 。

(I) 解不等式  $f(x) \geq 6$ ；

(II) 设函数  $f(x)$  的最小值为  $m$ ，已知正实数  $a, b$ ，且  $k = \max\left\{\frac{1}{a+b}, \frac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$ ，

证明： $k^2 m \geq 1$ 。

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站 (www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

福利：

- 1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题