

辽宁省庄河市高级中学 2022-2023 学年度第一学期 12 月月考

高三数学 A

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z = a + \frac{i-1}{1+i}$ 的实部与虚部相等，其中 a 是实数，则 $a =$

- A. 1 B. 0 C. -1 D. 2

2. 江宁为“六代豪华”之地、“十朝京畿”要地，享有“天下望县、国中首善之地”的美誉。江宁区的美丽乡村示范区按照“一村一品、一村一景、一村一业、一村一韵”要求，打造了十大美丽乡村，其中黄龙规村、大塘金村、周村、石塘村全国有名。现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学前往以上四个村考察乡村文化，每一位同学只去一个村，每个村至少去一人，则所有的安排方案总数为（ ）

- A. 96 B. 480 C. 240 D. 120

3. 设 α 、 β 为锐角， $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ， $\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，则 $\alpha + \beta$ 为（ ）

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ D. 以上都不对

4. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}(x+1), & x \in [0, 2) \\ 1 - |x-4|, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$ ，

则关于 x 的函数 $F(x) = f(x) - a$ ($0 < a < 1$) 的所有零点之和为

- A. $3^a - 1$ B. $1 - 3^a$ C. $3^a - 1$ D. $1 - 3^a$

5. 李雷和韩梅梅两人都计划在国庆节的 7 天假期中，到“东亚文化之都--泉州”“二日游”，若他们不同一天出现在泉州，则他们出游的不同方案共有

- A. 16 种 B. 18 种 C. 20 种 D. 24 种

6. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上是增函数，若 $g(x) = f(x+2)$ 是奇函数，且 $g(-2) = 0$ ，则不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集是.

- A. $[-4, 0] \cup [2, +\infty)$ B. $[-4, -2] \cup [0, +\infty)$
C. $[0, 2] \cup [4, +\infty)$ D. $[-2, 4]$

7. 已知点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq \pm a$) 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上，若点 M 为椭圆 C 的右顶点，且 $PO \perp PM$ (O 为坐标原点)，则椭圆 C 的离心率 e 的取值范围是（ ）

A. $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} = 2a_n + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则

A. 当 $0 < a_n < 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, 则 $a_{n+1} > a_n$ B. 当 $a_n > 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 时, 则 $a_{n+1} < a_n$

C. 当 $a_1 = \frac{1}{2}$ 时, 则 $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} > \sqrt{2n+4}$ D. 当 $a_1 = 2$ 时, 则 $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} > \sqrt{3n+20}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 下列说法正确的是 ()

A. 为了更好地开展创文卫工作, 需要对在校中小学生参加社会实践活动的意向进行调查, 拟采用分层抽样的方法从该地区 $ABCD$ 四个学校中抽取一个容量为 400 的样本进行调查, 已知 $ABCD$ 四校人数之比为 $7:4:3:6$, 则应从 B 校中抽取的样本数量为 80

B. 6 件产品中有 4 件正品, 2 件次品, 从中任取 2 件, 则至少取到 1 件次品的概率为 0.6

C. 已知变量 x, y 线性相关, 由样本数据算得线性回归方程是 $y = 0.4x + a$, 且由样本数据算得 $\bar{x} = 4, \bar{y} = 3.7$, 则 $a = 2.1$

D. 箱子中有 4 个红球、2 个白球共 6 个小球, 依次不放回地抽取 2 个小球, 记事件 $M = \{\text{第一次取到红球}\}$, $N = \{\text{第二次取到白球}\}$, 则 M, N 为相互独立事件

10. 悬链线指的是一种曲线, 指两端固定的一条 (粗细与质量分布) 均匀、柔软 (不能伸长) 的链条, 在重力的作用下所具有的曲线形状, 例如悬索桥等, 因其与两端固定的绳子在均匀引力作用下下垂相似而得名. 适当选择坐标系后, 悬链线的方程是一个双曲余弦函数, 其标准方程为 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a \cosh \frac{x}{a} = a \cdot \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$, 其中 a 为非零常数, e 为自然对数的底数). 当 $a = 1$ 时, 记 $f(x) = \cosh x$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(2x) = 2f^2(x) - 1$

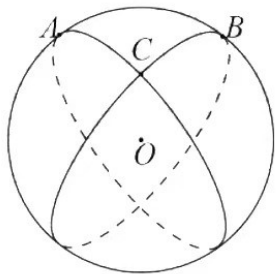
B. $f(x)$ 是周期函数

C. $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 是奇函数

D. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减

11. 球面几何学是几何学的一个重要分支, 在航海、航空、卫星定位等方面都有广泛的应用, 如图, A, B, C 是球面上不在同一个大圆上的三点, 经过这三个点中任意两点的

圆的劣弧分别为 AB , BC , CA , 由这三条劣弧围成的球面图形称为球面 $\triangle ABC$. 已知 R 为地球半径, N 为北极点, P, Q 是地球表面上的两点, 则下列结论正确的有 ()



- A. 若 P, Q 在赤道上, 且 $|PQ| = \sqrt{2}R$, 则三棱锥 $O-NPQ$ 的体积为 $\frac{1}{6}R^3$
- B. 若 P, Q 在赤道上, 且 $|PQ| = R$, 则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为 $\frac{1}{3}\pi R^2$
- C. 若 $|NP| = |PQ| = |QN| = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, 则球面 $\triangle NPQ$ 的面积为 πR^2
- D. 若 $|NP| = |PQ| = |QN| = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$, 则由球面 $\triangle NPQ$, 平面 OPN , 平面 OQN 及平面 OPQ 所围成的几何体的体积为 $\frac{4\pi R^3}{9}$

12. 已知函数 $f(x) = 2\ln x + x^2 + x$, 若正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 4$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 在函数 $f(x)$ 上存在点 $P(x_0, f(x_0))$, 使得函数 $f(x)$ 过该点的切线与 $f(x)$ 只有一个交点
- B. 过点 $O(0, 0)$ 可作两条切线与函数 $f(x)$ 相切
- C. $x_1 + x_2 \geq 2$
- D. $x_1 + x_2$ 的值与 2 的关系不确定

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分

13. 由正整数组成的数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 分别为递增的等差数列、等比数列, $a_1 = b_1 = 1$, 记 $c_n = a_n + b_n$, 若存在正整数 k ($k \geq 2$) 满足 $c_{k-1} = 100$, $c_{k+1} = 1000$, 则 $c_k =$ _____.

14. 已知单位向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 两两的夹角均为 θ ($0 < \theta < \pi$, 且 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$), 若空间向量 $\vec{a}$ 满足 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ($x, y, z \in \mathbb{R}$), 则有序实数组称 (x, y, z) 为向量 $\vec{a}$ 在“仿射”坐标系 $O-xyz$ (O 为坐标原点) 下的“仿射”坐标, 记作 $\vec{a} = (x, y, z)_\theta$. 已知 $\vec{a} = (1, -1, 0)_\theta$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)_\theta$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____.

15. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直, $AA_1 = BC = 2$, $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$, 则三棱柱

$ABC - A_1B_1C_1$ 的外接球的体积为_____.

16. 若对任意正实数 x, y , 不等式 $(3x - y)(\ln y - \ln x + 2) \leq ax$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\vec{b} = (\cos x, \sin x)$, $\vec{c} = (\sin x + 2 \sin \alpha, \cos x + 2 \cos \alpha)$, 其中

$0 < \alpha < x < \pi$

(1) 若 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 求函数 $f(x) = \vec{b} \cdot \vec{c}$ 的最小值及相应的 x 的值;

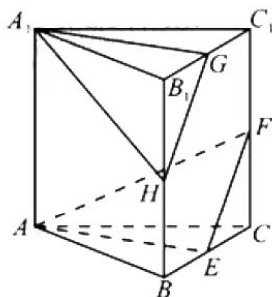
(2) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $\vec{a} \perp \vec{c}$, 求 $\tan 2\alpha$ 的值.

18. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_3 = 6, a_5 + a_7 = 24$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 a_n 及 S_n ;

(2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n^2 - 1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形, E, F, G, H 分别是 BC, CC_1, B_1C_1, BB_1 的中点. 证明:

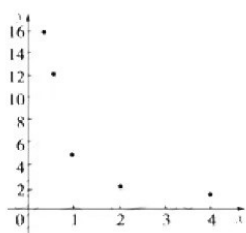


(1) 平面 $AEF \perp$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 平面 $A_1GH \parallel$ 平面 AEF .

20. 在一次抽样调查中测得样本的 5 个样本点, 数值如下表:

x	0.25	0.5	1	2	4
y	16	12	5	2	1



(1) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + \frac{k}{x}$ 哪一个适宜作为 y 关于 x 的回归方程类型?

(给出判断即可, 不必说明理由)

(2) 根据 (1) 的判断结果试建立 y 与 x 之间的回归方程. (注意 a, b 或 c, k 计算结果保留整数)

(3) 由 (2) 中所得设 $z = y + x$ 且 $x \in [4, \infty)$, 试求 z 的最小值.

参考数据及公式如下:

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 23, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 21.3125, \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 430, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$$

21. 已知动圆 M 既与圆 $C_1: x^2 + y^2 + 4x = 0$ 外切, 又与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 96 = 0$ 内切,

求动圆的圆心 M 的轨迹方程.

22. 已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{x}, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x + 2y = 0$ 垂直, 求 a 的值;

(2) 当 $a = 1$ 时, 试问曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 2x - 3$ 是否有公共点? 如果有, 求出所有公共点;

若没有, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线