第九届陈省身杯全国高中数学奥林匹克

第一天　　2018.7.25

1. 已知锐角$\triangle ABC$的外接圆为$\odot O$，边BC、CA、AB上的高的垂足分别为D、E、F，直线EF与$\odot O$的$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$分别交于点G、H，直线DF与BG、BH分别交于点K、L，直线DE与CG、CH分别交于点M、N. 证明：K、L、M、N四点共圆，且该圆的直径为$\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}$，其中，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$.

证明　如图1，因为B、C、E、F四点共圆，所以，$\angle AFE=\angle ACB$.

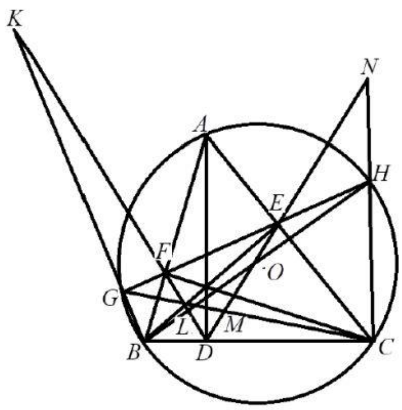

图1

注意到，$\angle AFE=\dfrac{\overset{\frown}{GB}^{\circ}+\overset{\frown}{HA}^{\circ}}{2}$，$\angle ACB=\dfrac{\overset{\frown}{AB}^{\circ}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{AG}^{\circ}+\overset{\frown}{GB}^{\circ}}{2}$.

从而，$\overset{\frown}{HA}=\overset{\frown}{AG}$，即$AG=AH$.

因为C、A、F、D四点共圆，所以，$\angle BFD=\angle ACB=\angle AFE=\angle BFG$.

从而，直线GH与直线DK关于直线AB对称.

由$\overset{\frown}{AG}^{\circ}=\overset{\frown}{AH}^{\circ}$，知$\angle GBA=\angle ABH$.

从而，直线BK与直线BH关于直线AB对称.

因此，点K、H关于直线AB对称，即$AK=AH$.

类似地：点L、G关于直线AB对称，即$AL=AG$;

G、N 关于直线 AC 对称，即 $AG=AN$；

M、H 关于直线 AC 对称，即 $AM=AH$.

综上，$AL=AN=AG=AH=AK=AM$.

因此，K、L、M、N 四点共圆，且圆心为 A，半径为 AG，记该圆为⊙A.

设⊙O 的半径为 R，⊙O 的直径 AQ 与 GH 交于点 P．如图 2.

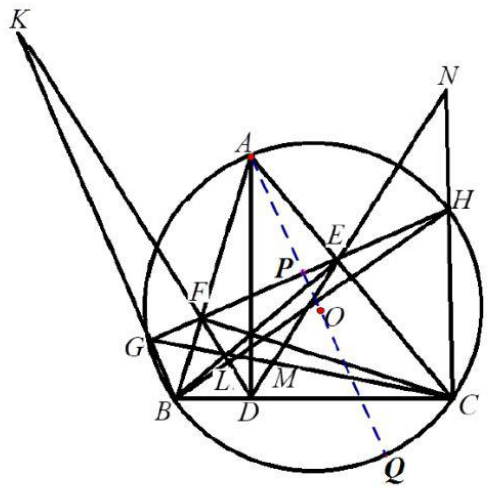

图 2

则 $\angle AGQ=90°$，且 $AP\perp GH$.

由射影定理得 $AG^2=AQ\cdot AP$.

注意到，$AP=AF\cdot\sin\angle AFE=AC\cdot\cos\angle CAB\cdot\sin\angle ACB$.

故 $AQ\cdot AP=2R\cdot AC\cos\angle CAB\cdot\sin\angle ACB$

$=AB\cdot AC\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$.

因此，$AG=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}$，⊙$A$ 的直径为 $\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)}$.

2．设 a、b、c、$d>0$．证明：$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}\leqslant(a+b+c)^{\frac{1}{3}}(a+c+d)^{\frac{1}{3}}$，并求等号成立的充分必要条件．

证明　由均值不等式得

$$3\left(\frac{ab}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+c+d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leqslant\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+c+d},$$

$$3\left(\frac{cd}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{c}{a+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{d}{a+c+d}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leqslant\frac{c}{a+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{d}{a+c+d}.$$

以上两式相加得

$$3\left(\frac{ab}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}}+3\left(\frac{cd}{(a+b+c)(a+c+d)}\right)^{\frac{1}{3}}\leqslant3,$$

即 $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}}\leqslant(a+b+c)^{\frac{1}{3}}(a+c+d)^{\frac{1}{3}}$.

等号成立的充分必要条件为

$$\begin{cases}\dfrac{a}{a+c}=\dfrac{b}{a+b+c}=\dfrac{a+c}{a+c+d},\\[2mm]\dfrac{c}{a+c}=\dfrac{a+c}{a+b+c}=\dfrac{d}{a+c+d}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a}{a+c}=\frac{b}{a+b+c}=\frac{a+c}{a+c+d}.$$

令 $\dfrac{a}{a+c}=\dfrac{b}{a+b+c}=\dfrac{a+c}{a+c+d}=\lambda\in(0,1)$.

则 $c=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}a$，$b=\dfrac{1}{1-\lambda}a$，$d=\dfrac{1-\lambda}{\lambda^2}a$，即等号成立的充分必要条件为 $b=\dfrac{1}{1-\lambda}a$，$c=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}a$，$d=\dfrac{1-\lambda}{\lambda^2}a$，其中，$\lambda\in(0,1)$.

3．已知正整数 $n\geqslant 2$，若整数数列 $x_0, x_1, \ldots, x_n$ 满足：

(1)对任意的 $0\leqslant i\leqslant n$，有$|x_i|\leqslant n$；

(2)对任意的 $0\leqslant i<j\leqslant n$，有 $x_i\neq x_j$；

(3)对任意的 $0\leqslant i<j<k\leqslant n$，有

$$\max\{|x_k-x_i|,|x_k-x_j|\}=\frac{1}{2}(|x_i-x_j|+|x_j-x_k|+|x_k-x_i|),$$

则称该数列为“优数列”． 求优数列的个数．

解 对 $0\leqslant i<j<k\leqslant n$，由条件(3)得

$$\max\{|x_k-x_i|,|x_k-x_j|\}=\frac{1}{2}(|x_i-x_j|+|x_j-x_k|+|x_k-x_i|)$$
$$=\max\{x_i,x_j,x_k\}-\min\{x_i,x_j,x_k\}.$$

则 x_k 在数轴上不夹在 x_i、x_j 中间，即 $x_i<x_k<x_j$ 或 $x_j<x_k<x_i$ 均不成立．

首先，设 x_0, x_1, …, x_n 为连续 $n+1$ 个整数组成的一个满足条件(3)的排列．由前面的论述知对 $k=1, 2, \cdots, n$，有 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 为连续 $k+1$ 个整数的排列．

将满足条件(3)的每个排列 x_0, x_1, …, x_n 依下标顺序放到数轴上．设 $x_0=i$．则 x_1 有两种可能位置：$i-1$ 或 $i+1$．当已经将 x_0, …, x_{k-1} 放到数轴上时，x_k 的位置也有两种可能：$\min\limits_{0\leqslant i\leqslant k-1}\{x_i\}-1$或$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant k-1}\{x_i\}+1$． 故将所有满足条件(3)的 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 放到数轴上时，其相互位置共有 2^n 种放法，即对于连续 $n+1$ 个整数，其满足条件(3)的排列个数为 2^n．

最后，从 $\mathrm{Z}\cap[-n, n]$中任意选出 $n+1$ 个数，将其依大小关系编号为 0，1，…，n，将其视为连续 $n+1$ 个整数，知其满足条件(3)的排列个数为 2^n．故满足条件(1)、(2)、(3)的排列总数为$\mathrm{C}_{2n+1}^{n+1}\cdot 2^n$．

4. 某年级有 $3N$ 名学生，在一次数学测验中可能的分数为 60，61，…，100，这些分数至少各出现两次，且平均分数为 82.4．证明：可将这个年级的学生分成三个班，每班有 N 名学生，且各班的平均分数均为 82.4．

证明 设此年级 $3N$ 名学生的分数分别为$60=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{3N}=100$，且定义和$s_i=\sum\limits_{j=i+1}^{i+N}a_j$（$i$=0, 1, …, $2N$）．

显然,$s_0\leqslant s_N\leqslant s_{2N}$且$s_0+s_N+s_{2N}=\sum\limits_{j=1}^{3N}a_j=82.4\times 3N$，$82.4\times 3N$为正整数．

故$N\equiv 0(\bmod 5)$．因此，$82.4N$为正整数．

显然，$s_0\leqslant 82.4N\leqslant s_{2N}$．

注意到，若$s_0=82.4N$,则$s_N=s_{2N}=82.4N$，即

$a_1=a_2=\ldots=a_{3N}=82.4$，

矛盾．

从而，$s_0<82.4N$．

类似地，$s_{2N}>82.4N$．

因此，$s_0<82.4N<s_{2N}$．

设$f_0(l)=\sum\limits_{j=1}^{N-1}a_j+a_{N+l}$，其中，$l=0,1,\cdots,2N$．

显然，$f_0(0)=s_0<82.4N$，且$f_0(l+1)-f_0(l)=a_{N+l+1}-a_{N+l}=0$或1，即$f_0(l)$在集合$\{0,1,\cdots,2N\}$上为连续变化的整数．

若 $f_0(2N) \geqslant 82.4N$，则由中间值定理，知存在 $m \in \{0,1,\cdots,2N\}$，使得 $f_0(m)=82.4N$，对应的 N 名学生可以组成满足条件的一班.

若 $f_0(2N)<82.4N$，则定义

$$f_1(l)=a_{3N}+\sum_{j=1}^{N-2}a_j+a_{N+l},$$

其中，$l \in \{-1,0,1,\cdots,2N-1\}$.

显然，$f_1(-1)=f_0(2N)<82.4N$.

注意到，$f_1(l+1)-f_1(l)=a_{N+l+1}-a_{N+l}=0$ 或 1，即 $f_1(l)$ 在 $\{-1,0,1,\cdots,2N-1\}$ 上为连续变化的整数． 若 $f_1(2N-1) \geqslant 82.4N$，则由中间值定理，知存在 $m \in \{-1,0,1,\cdots,2N-1\}$，使得 $f_1(m)=82.4N$. 对应的 N 名学生可以组成满足条件的一班.

依此类推.

定义 $f_k(l)=\sum_{j=3N-k+1}^{3N}a_j+\sum_{j=1}^{N-k-1}a_j+a_{N+l}$，其中，

$l \in \{-k,-k+1,\cdots,-k+2N\}$，$k \in \{0,1,2,\cdots,N-1\}$.

则 $f_k(-k)=f_{k-1}(-k+1+2N)$.

注意到，$f_{N-1}(N+1)=\sum_{j=2N+2}^{3N}a_j+a_{2N+1}=s_{2N}>82.4N$.

故存在 $k \in \{0,1,2,\cdots,N-1\}$，使得 $f_k(-k)<82.4N \leqslant f_k(2N-k)$.

类似地，存在 $m \in \{-k,-k+1,\cdots,-k+2N\}$，使得 $f_k(m)=82.4N$，对应的 N 名学生可以组成满足条件的一班.

其余的 2N 名学生的分数依次为 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{2N}$，其取值为 $[b_1,b_{2N}]$ 上的正整数，且此区间内的每个正整数各至少出现一次，且 $b_1,b_2,\cdots,b_{2N}$ 的算术平均值为 82．4.

设$t_i=\sum_{j=i+1}^{i+N}b_j$（$i=0,1,\cdots,N$）.

显然，$t_0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_N$，且$t_0+t_N=\sum_{j=1}^{2N}b_j=82.4\times 2N$.

于是，$t_0\leqslant 82.4N\leqslant t_N$.

设 k 为使$t_k\leqslant 82.4N$成立的最大角标（若$t_k=82.4N$，则结论成立），以下不妨设$t_k<82.4N$.

显然，$k\neq N$. 因此，$t_k<82.4N<t_{k+1}$.

设$g(l)=\sum_{j=k+1}^{N+k+1}b_j-b_{k+l}(l=1,2,\cdots,N+1)$.

注意到，$g(l+1)-g(l)=b_{k+l}-b_{k+l+1}=-1$或 0.

因此，$g(l)$在集合$\{1,2,\cdots,N+1\}$上为连续变化的整数.

而$g(1)=\sum_{j=k+1}^{N+k+1}b_j-b_{k+1}=t_{k+1}>82.4N$，

$$g(N+1)=\sum_{j=k+1}^{N+k+1}b_j-b_{k+N+1}=t_k<82.4N.$$

据中间值定理，知存在$l\in\{1,2,\cdots,N+1\}$，使得$g(l)=82.4N$，对应的 N 名学生组成满足条件的二班．剩余的 N 名同学组成满足条件的三班.

综上，原命题成立.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注