

2023 年邵阳市高三第三次联考参考答案与评分标准

数 学

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 2. A 3. C 4. B 5. B

6. D

【详解】如图(1),由边长为 2,可得 $\triangle EBC$ 的高 $EG = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$,

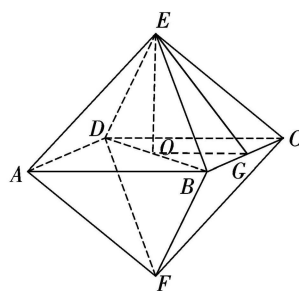
$EO = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$,则其表面积为

$$S = 8 \times \frac{EG \cdot BC}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{3} \times 2}{2} = 8\sqrt{3}.$$

$$\text{体积为 } V = 2 \times \frac{AB \cdot BC \cdot EO}{3} = 2 \times \frac{2 \times 2 \times \sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

\therefore 此正八面体的表面积与体积之比为 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

故选:D.



图(1)

7. B

【详解】如图(2),连接 $A'C, B'C$,则由题设得, $\angle A'CB' = 90^\circ$,

因为以 BC, AC, AB 为边向外作三个等边三角形,其外接圆圆心依次记为 A', B', C' ,

$$\text{所以 } B'C = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{2}{3} = 1, A'C = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 = \sqrt{3},$$

所以 $A'B' = 2$.

故选:B.

8. A

【详解】由 $f(x) - f(-x) = x(e^x + e^{-x})$,得 $f(x) - \frac{x}{e^x} = f(-x) - \frac{-x}{e^{-x}}$.

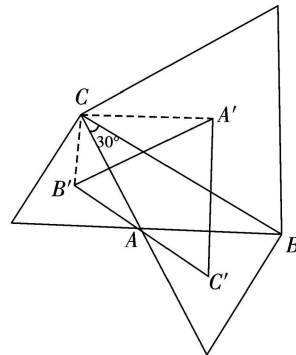
令 $g(x) = f(x) - \frac{x}{e^x}$,则 $g(x) = g(-x)$,即 $g(x)$ 为偶函数.

又 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g'(x) = f'(x) + \frac{x-1}{e^x} < 0$.即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

由 $f(2a) - f(a+2) - 2ae^{-2a} + ae^{-a-2} + 2e^{-a-2} \geq 0$,得 $g(2a) \geq g(a+2)$.

又 $g(x)$ 为偶函数,所以 $g(|2a|) \geq g(|a+2|)$,即 $4a^2 \leq a^2 + 4a + 4$ 解得 $-\frac{2}{3} \leq a \leq 2$.

故选:A



图(2)

二、多选题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. ABD 10. BC

11. AC

【详解】对于选项A, $a=2, c=4, b=2\sqrt{3}$, 则双曲线的方程为: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, A选项正确;

对于选项B, 在 $\triangle PF_1F_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| - |PF_2|)^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4a^2 + 2|PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2,$$

$\therefore |PF_1| \cdot |PF_2| = 24$, 则B选项错误;

对于选项C, 由双曲线的性质可得射线 n 所在直线的斜率范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, 则C选项正确;

对于选项D, 当 n 过点 $M(8, 5)$ 时, 由双曲线定义可得光由 $F_2 \rightarrow P \rightarrow M$ 所经过的路程为 $|F_2P| + |PM| = |F_1P| + |PM| - 2a = |MF_1| - 4 = 9$, 则D选项错误.

故选: AC.

12. ACD

【详解】对于A选项, $V = \frac{\pi}{3}(1+2+4) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}\pi$, 则A选项正确.

对于B选项, 如图(3), 过 S 作 SD 垂直于下底面于点 D , 则 $O_1O_2 \parallel SD$,

所以直线 SA 与直线 O_1O_2 所成角即为直线 SA 与直线 SD 所成

角, 即 $\angle ASD$ 为所求, 而 $\tan \angle ASD = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{2\sqrt{2}}$,

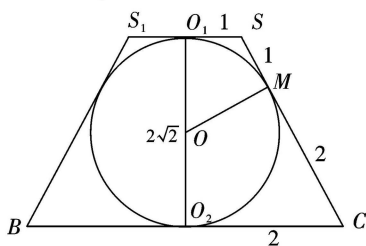
由圆的性质得, $1 \leq AD \leq 3$,

所以 $\tan \angle ASD = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{2\sqrt{2}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4} \right]$, 因为 $\frac{3\sqrt{2}}{4} < \sqrt{3}, \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$,

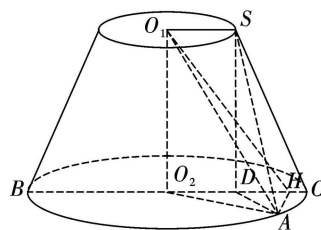
则B选项错误.

对于C选项, 若圆台存在内切球, 则必有轴截面的等腰梯形存在内切圆, 如图(4)所示,

梯形的上底和下底分别为2, 4, 高为 $2\sqrt{2}$, 易得等腰梯形的腰为 $\sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$, 假设等腰梯形有内切圆, 由内切圆的性质可得腰长为 $R_1 + R_2 = 3$, 所以圆台存在内切球, 且内切球的半径为 $\sqrt{2}$, 则C选项正确;



图(4)



图(5)

对于D选项, 如图(5),

平面 SO_1O_2 即平面 SO_1O_2C , 过点 A 做 $AH \perp BC$ 交 BC 于点 H , 因为 SD 垂直于下底面,

而 AH 含于下底面, 所以 $SD \perp AH$, 又 $SD \cap BC = D$, 所以 $AH \perp$ 平面 SO_1O_2C ,

所以直线 AO_1 与平面 SO_1O_2C 所成角即为 $\angle AO_1H$, 且 $\tan \angle AO_1H = \frac{AH}{O_1H}$

设 $AH = x$, 则 $O_2H = \sqrt{R_2^2 - AH^2} = \sqrt{4 - x^2}$,

所以 $O_1H = \sqrt{O_1O_2^2 + O_2H^2} = \sqrt{8 + 4 - x^2} = \sqrt{12 - x^2}$,

其中 $AH = x \in [0, 2]$, 所以 $\tan \angle AO_1H = \frac{AH}{O_1H} = \frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}$, 当 $x = 0$ 时, $\tan \angle AO_1H = 0$,

当 $x \in (0, 2]$ 时, $\tan \angle AO_1H = \frac{x}{\sqrt{12 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{x^2} - 1}}$.

根据复合函数的单调性, 可知函数 $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{12}{x^2} - 1}}$,

在 $(0, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x = 2$ 时, $\tan \angle AO_1H$ 有最大值, 最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 D 选项正确.

故选: ACD.

三、填空题: 本题 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{3}{5}$

14. 31π

【详解】令三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径为 R , 则满足 $(2R)^2 = PA^2 + AB^2 + AC^2 = 31$, 所以外接球表面积为 31π .

15. 2

【详解】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则由过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点的直线的性质可得: $|AB| = x_1 + x_2 + 2 = \frac{4}{\sin^2 60^\circ} = \frac{16}{3}$, $\therefore x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$, 又 $\because x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} = 1$, $\therefore x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$. 过点 A, B 作准线的垂线, 分

别交准线于点 E, D , 则 $\frac{|AF|}{|BF|} = \lambda_1 = \frac{|AE|}{|BD|} = \frac{3 - (-1)}{\frac{1}{3} - (-1)} = 3$,

同理可得 $\frac{|BC|}{|BF|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{1}{\sin 30^\circ} = \lambda_2 = 2$, $\therefore \frac{3}{\lambda_1} + \frac{2}{\lambda_2} = 2$.

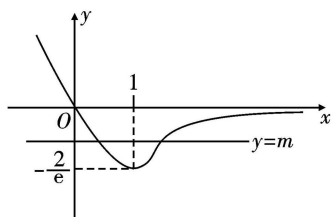
16. $[-\ln 2, 0)$

【详解】 $f'(x) = 2x + me^x = 0$ 有两个不同实根 x_1, x_2 且 $x_2 \geq 2x_1$, $\therefore m = \frac{-2x}{e^x}$.

设 $h(x) = \frac{-2x}{e^x}, h'(x) = \frac{2(x-1)}{e^x}$,

$\therefore h(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增.

$h(x)$ 图象如下:



图(6)

当 $x_2 = 2x_1$ 时, 即 $\frac{-2x_1}{e^{x_1}} = \frac{-2x_2}{e^{x_2}}$.

$\therefore x_1 = \ln 2, h(\ln 2) = -\ln 2,$

$\therefore x_2 \geq 2x_1$ 时, $-\ln 2 \leq m < 0.$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得:

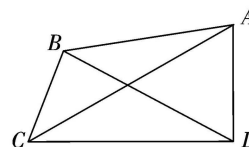
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC.$ 1 分

$\therefore AC^2 = 2 + 1 - 2 \times \sqrt{2} \times 1 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$ 2 分

$\therefore AC = \sqrt{5}.$ 3 分

\therefore 在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中, $AD = \sqrt{5-4} = 1,$ 4 分

$\therefore \sin \angle ACD = \frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$ 5 分



图(7)

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得:

$\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$

$\therefore \sin \angle BCA = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$ 且 $0^\circ < \angle BCA < 45^\circ.$ 6 分

又 $0^\circ < \angle ACD < 90^\circ,$

$\therefore \angle BCA = \angle ACD.$ 7 分

$\therefore \cos \angle BCD = \cos 2 \angle BCA = 1 - 2 \sin^2 \angle BCA = 1 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$ 8 分

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD,$

$\therefore BD^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{3}{5} = \frac{13}{5},$

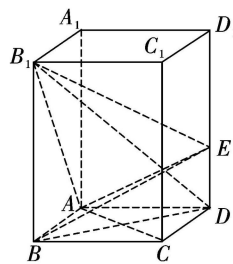
$\therefore BD = \frac{\sqrt{65}}{5}.$ 10 分

18. 解: (1) $\therefore a_3 = 5, S_3 = 81,$

$\therefore a_1 = 1, d = 2,$

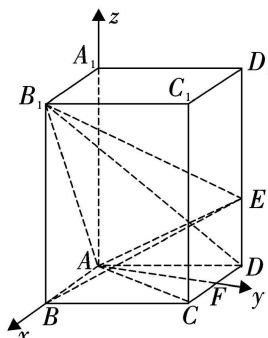
$\therefore a_n = 2n - 1$ 2分
 $\therefore a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$, ①
 $\therefore a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} = (n-2) \cdot 3^n + 3 (n \geq 2)$, ②
 所以①-②得, $a_n b_n = (2n-1) \cdot 3^n$,
 $\therefore b_n = 3^n (n \geq 2)$ 5分
 当 $n=1$ 时, $a_1 b_1 = 3, b_1 = 3$, 符合 $b_n = 3^n$.
 $\therefore a_n = 2n-1, b_n = 3^n$ 6分
 (2) $T_{2n} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2n}$, 依题有:
 $T_{2n} = (b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) + \left(\frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_4 a_6} + \dots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+2}} \right)$ 7分
 记 $T_{\text{奇}} = b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}$, 则 $T_{\text{奇}} = \frac{3^{2n+1} - 3}{8}$ 9分
 记 $T_{\text{偶}} = \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_4 a_6} + \dots + \frac{1}{a_{2n} a_{2n+2}}$,
 则 $T_{\text{偶}} = \frac{1}{2d} \left[\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n+2}} \right) \right]$
 $= \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{2n+2}} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right)$ 11分
 所以 $T_{2n} = \frac{3^{2n+1} - 3}{8} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{3 \cdot 9^n}{8} - \frac{1}{16n+12} - \frac{7}{24}$ 12分
 (若 $T_n = \frac{3}{8} \cdot 9^n - \frac{3}{8} + \frac{n}{12n+9}$ 也给满分)

19. (1) 证明: 连接 BD ,
- \therefore 底面 $ABCD$ 为菱形, $\therefore AC \perp BD$ 1分
 - 又 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD, AC \subset$ 平面 $ABCD, \therefore BB_1 \perp AC$ 2分
 - 又 $BD \cap BB_1 = B, BD, BB_1 \subset$ 面 BDB_1 , 3分
 - $\therefore AC \perp$ 平面 BDB_1 4分
 - 又 $B_1 D \subset$ 平面 $BDB_1, \therefore AC \perp B_1 D$ 5分



图(8)

(2) 设 CD 的中点为 F , 连接 AF , 如图:
 $\therefore \triangle ACD$ 为等边三角形, $\therefore AF \perp CD$, 又 $CD \parallel AB$, 则 $AF \perp AB$.
 又 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 则 $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AF$.
 以 A 为坐标原点建立如图所示空间直角坐标系, 则
 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 0), E(-1, \sqrt{3}, h) (0 \leq h \leq 2\sqrt{3})$,
 $B_1(2, 0, 2\sqrt{3})$, 6分
 设平面 $AB_1 E$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,
 $\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB}_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} 2x + 2\sqrt{3}z = 0 \\ -x + \sqrt{3}y + hz = 0 \end{cases}$
 令 $x=3$, 则 $\vec{n} = (3, h + \sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 7分



图(9)

又平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,
 则 $\cos\langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 15}}$ 8分

又平面 AB_1E 与平面 $ABCD$ 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{5}$,

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + 2\sqrt{3}h + 15}} = \frac{2}{5}, 0 \leq h \leq 2\sqrt{3},$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 9分$$

$$\therefore \vec{BE} = \left(-3, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \dots\dots\dots 10分$$

$$\cos\langle \vec{BE}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{BE} \cdot \vec{n}}{|\vec{BE}| |\vec{n}|} = \frac{-6}{\frac{\sqrt{51}}{2} \cdot \frac{\sqrt{75}}{2}} = \frac{-8\sqrt{17}}{85}. \dots\dots\dots 11分$$

\therefore 直线 BE 与平面 AB_1E 所成角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{17}}{85}$ 12分

20. 解: (1)

评价 \ 性别	喜欢	不喜欢	合计
男性	15	30	45
女性	35	20	55
合计	50	50	100

..... 3分

(2) 零假设 H_0 : 假设性别因素与评价结果无关,

$$\text{计算卡方值 } \chi^2 = \frac{100(30 \times 35 - 20 \times 15)^2}{50 \times 50 \times 45 \times 55} = \frac{100}{11} \approx 9.091, \dots\dots\dots 5分$$

小概率值对应的临界值为 $\chi_\alpha = 7.879$, 所以 $\chi^2 > \chi_\alpha$.

故推断零假设 H_0 不成立, 评价结果与性别有关系. 8分

(3) 由题意得, 选取的 3 人中, 评价结果“喜欢”的为 1 人, “不喜欢”的为 2 人.

所以 X 的所有可能取值为 150, 200, 250, 300. 9分

$$\text{则 } P(X=150) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27},$$

$$P(X=200) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \times C_2^1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

$$P(X=250) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times C_2^1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

$$P(X=300) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}. \dots\dots\dots 11分$$

X	150	200	250	300
P	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{27}$

数学期望为 $E(X) = \frac{650}{3}$ 12分

21. 解: (1) 因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$, 则

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4分

(2) $\because \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$,

\therefore 四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}OAPB} = S_{\triangle OAB}$ 5分

①若直线 AB 斜率不存在, 此时点 P 为长轴端点 $(2, 0)$ (若 P 为另一端点, $\triangle ABP$ 面积不变),

不妨设 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 则 $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6分

②若直线 AB 斜率存在时, 设 AB 方程: $y = kx + m$. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

联立方程组得: $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 消去 y 可得: $(1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$.

由 $\Delta > 0$, 得 $1+4k^2 > m^2$,

$$x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{1+4k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1+4k^2}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\therefore \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \left(\frac{-8km}{1+4k^2}, \frac{2m}{1+4k^2} \right).$$

又点 P 在椭圆 C 上,

$$\therefore \frac{16k^2m^2}{(1+4k^2)^2} + \frac{4m^2}{(1+4k^2)^2} = 1.$$

$$\therefore 4m^2 = 1+4k^2, \text{ 满足 } \Delta > 0. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$|AB| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = 4\sqrt{\frac{(1+k^2)3m^2}{(1+4k^2)^2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{|m|}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{又点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{\sqrt{3}}{2}, S_{\triangle ABP} = S_{\triangle OAB} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述, $\triangle ABP$ 面积为定值, 且定值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = 2e^x - (x+1) \cdot \ln(x+1)$, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\therefore f(0) = 2, f'(x) = 2e^x - \ln(x+1) - 1, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore f'(0) = 1. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{曲线 } y=f(x) \text{ 在点 } (0, f(0)) \text{ 处的切线方程为: } y=x+2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) $\because f(x) \geq \cos x - (a-2)x + 1, x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

$$\therefore 2e^x - a(x+1) \cdot \ln(x+1) - \cos x - 1 + (a-2)x \geq 0 \text{ 恒成立.}$$

$$\text{构造函数 } g(x) = 2e^x - a(x+1)\ln(x+1) - \cos x + (a-2)x - 1,$$

$$\text{则 } g'(x) = 2e^x - a\ln(x+1) + \sin x - 2, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{且 } g(0) = 0, g'(0) = 0. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{令 } h(x) = 2e^x - a\ln(x+1) + \sin x - 2, \text{ 得 } h'(x) = 2e^x - \frac{a}{x+1} + \cos x, x \in [0, +\infty). \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{且 } h'(0) = 3-a, h(0) = 0. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

① 当 $a > 3$ 时, $h'(0) = 3-a < 0$, \therefore 存在 $x_0 > 0, h'(x_0) = 0$,

则 $h(x)$ 在 $[0, x_0]$ 上单调递减,

故存在 $0 < x_1 \leq x_0$, 有 $g(x_1) < 0$, 不符合题意. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

② 当 $0 < a \leq 3$ 时, 令 $\varphi(x) = 2e^x - \frac{a}{x+1} + \cos x, x \in [0, +\infty)$.

$$\text{则 } \varphi'(x) = 2e^x + \frac{a}{(x+1)^2} - \sin x > 2 + \frac{a}{(x+1)^2} - \sin x > 0, x \in [0, +\infty),$$

所以 $\varphi(x)$ 单调递增, 则 $\varphi(x) \geq \varphi(0) = 3-a \geq 0$.

所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(0) = 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$ 恒成立, 符合题意. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

③ 当 $a \leq 0$ 时, $\varphi(x) = 2e^x - \frac{a}{x+1} + \cos x > 2 + \cos x - \frac{a}{x+1} > 0, x \in [0, +\infty)$,

同理得, 符合题意.

综上所述 $a \leq 3$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

