

## 湖南师大附中 2023 届高三月考试卷 (七)

### 数学

时量:120 分钟 满分:150 分

#### 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知模为 2 的复数  $z$  对应的向量为  $\overrightarrow{OZ}$  ( $O$  为坐标原点), 它对应的点位于第二象限,  $\overrightarrow{OZ}$  与实轴正向的夹角为  $150^\circ$ , 则复数  $z$  为 ( )  
A.  $1+\sqrt{3}i$       B. 2      C.  $-1-\sqrt{3}i$       D.  $-\sqrt{3}-1$
2. 若一个  $n$  位正整数的所有数位上数字的  $n$  次方和等于这个数本身, 则称这个数是自恋数。已知所有一位正整数的自恋数组成集合  $A$ , 集合  $B=\{x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 4\}$ , 则  $A \cap B$  真子集个数为 ( )  
A. 3      B. 4      C. 7      D. 8
3. 已知  $f(x)$  为奇函数, 且  $x < 0$  时,  $f(x) = e^x$ , 则  $f(e) =$  ( )  
A.  $e^e$       B.  $-e^e$       C.  $e^{-e}$       D.  $-e^{-e}$
4. 杭州亚运会共设 40 个竞赛大项, 包括 31 个奥运项目和非奥运项目, 共设杭州赛区、宁波赛区、温州赛区、金华赛区、绍兴赛区、湖州赛区。现需从 6 名管理者中选取 4 人分别到温州、金华、绍兴、湖州四个赛区负责志愿者工作, 要求四个赛区各有一名管理者, 且 6 人中甲、乙两人不去温州赛区, 则不同的选择方案共有 ( )  
A. 300 种      B. 240 种      C. 144 种      D. 96 种

5. “碳达峰”是指二氧化碳的排放不再增长,达到峰值之后开始下降,而“碳中和”是指企业、团体或个人通过植树造林、节能减排等形式,抵消自身产生的二氧化碳排放量,实现二氧化碳“零排放”.某地区二氧化碳的排放量达到峰值 $a$ (亿吨)后开始下降,其二氧化碳的排放量 $S$ (亿吨)与时间 $t$ (年)满足函数关系式 $S=ab^t$ ,若经过4年,该地区二氧化碳的排放量为 $\frac{3a}{4}$ (亿吨),已知该地区通过植树造林、节能减排等形式抵消自身产生的二氧化碳排放量为 $\frac{a}{3}$ (亿吨),则该地区要实现“碳中和”,至少需要经过(参考数据 $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$ )( )

A. 13年                  B. 14年                  C. 15年                  D. 16年

6. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的右焦点为 $F$ ,短轴的一个端点为 $M$ ,直线 $l: 3x - 4y = 0$ 交椭圆 $E$ 于 $A, B$ 两点,若 $|AF| + |BF| = 4$ ,点 $M$ 到直线 $l$ 的距离不小于 $\frac{4}{5}$ ,则椭圆 $E$ 的离心率的取值范围是( )

A.  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$               B.  $(0, \frac{3}{4}]$               C.  $[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$               D.  $[\frac{3}{4}, 1)$

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$ ,正数 $a, b$ 满足 $f(2a) = 1 - f(b - 2)$ ,则 $\frac{2b}{a} + \frac{a}{2ab + b^2}$ 的最小值( )

A. 1                          B. 2                          C. 4                          D. 5

8. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB = AC = 1, \angle A = 120^\circ$ , $E, F$ 分别是边 $AB, AC$ 上的点,且 $\vec{AE} = \lambda \vec{AB}, \vec{AF} = \mu \vec{AC}$ ,其中 $\lambda, \mu \in (0, 1)$ ,且 $\lambda + 4\mu = 1$ ,若线段 $EF, BC$ 的中点分别为 $M, N$ ,则 $|\vec{MN}|$ 的最小值为( )



A.  $\frac{1}{7}$                           B.  $\frac{3}{7}$                           C.  $\frac{\sqrt{7}}{7}$                           D.  $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

二、选择题: 本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

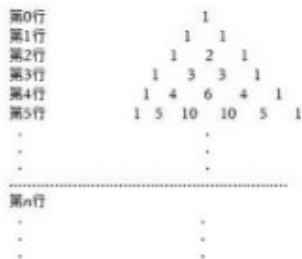
9. 假设某市场供应的智能手机中,市场占有率和优质率的信息如表:

品牌	甲	乙	其他
市场占有率	50%	30%	20%
优质率	80%	90%	70%

在该市场中任意买一部手机,用 $A_1, A_2, A_3$ 分别表示买到的智能手机为甲品牌、乙品牌,其他品牌, $B$ 表示可买到的优质品,则( )

A.  $P(A_1) = 0.50$       B.  $P(B | A_2) = 0.90$       C.  $P(BA_3) = 0.70$       D.  $P(B) = 0.81$

10. “杨辉三角”是二项式系数在三角形中的一种几何排列,在中第国南宋数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书中就有出现. 如图所示, 在“杨辉三角”中, 除每行两边的数都是 1 外, 其余每个数都是其“肩上”的两个数之和, 例如第 4 行的 6 为第 3 行中两个 3 的和. 则下列命题中正确的是 ( )



- A.  $C_3^2+C_4^2+C_5^2+\dots+C_{10}^2=164$   
 B. 在第 2022 行中第 1011 个数最大  
 C. 记“杨辉三角”第  $n$  行的第  $i$  个数为  $a_i$ , 则  $\sum_{j=1}^{n+1} 2^{j-1} a_j = 3^n$   
 D. 第 34 行中第 15 个数与第 16 个数之比为 2:3
11. 已知球  $O$  的半径为 4, 在球心  $O$  的大小为  $45^\circ$  的二面角  $\alpha-l-\beta$  内, 二面角  $\alpha-l-\beta$  的两个半平面所在的平面分别截球面得两个圆  $O_1, O_2$ , 若两圆  $O_1, O_2$  的公共弦  $AB$  的长为 4,  $E$  为  $AB$  的中点, 四面体  $OAO_1O_2$  的体积为  $V$ , 则正确的是 ( )
- A.  $O, E, O_1, O_2$  四点共圆  
 B.  $OE = \sqrt{3}$   
 C.  $O_1O_2 = \sqrt{6}$   
 D.  $V$  的最大值为  $\sqrt{2}-1$
12. 2021 年 3 月 30 日, 小米正式开始启用具备“超椭圆”数学之美的新 logo(如图所示), 设计师的灵感来源于曲线  $C: \left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1 (n > 0, n \in \mathbb{R})$ . 当  $n=4, a=2, b=1$  时, 下列关于曲线  $C$  的判断正确的有 ( )
- A. 曲线  $C$  关于  $x$  轴和  $y$  轴对称  
 B. 曲线  $C$  所围成的封闭图形的面积小于 8  
 C. 设  $M(\sqrt{3}, 0)$ , 直线  $x-y+\sqrt{3}=0$  交曲线  $C$  于  $P, Q$  两点, 则  $\triangle PQM$  的周长小于 8  
 D. 曲线  $C$  上的点到原点  $O$  的距离的最大值为  $17^{\frac{1}{4}}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

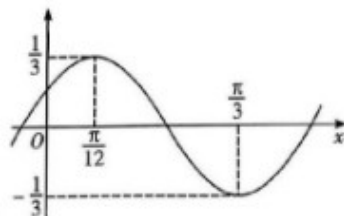
13. 已知  $f(x) = \begin{cases} f(x+1), & x < 4, \\ (\frac{1}{2})^x, & x \geq 4. \end{cases}$ , 则  $f(\log_2 3) =$  \_\_\_\_\_.
14. 已知:  $A(-2, 0), B(2, 0), C(0, 2), E(-1, 0), F(1, 0)$ , 一束光线从  $F$  点出发射到  $BC$  上的  $D$  点经  $BC$  反射后, 再经  $AC$  反射, 落到线段  $AE$  上(不含端点). 则  $FD$  斜率的取值范围是 \_\_\_\_\_.
15. 设  $\{a_n\}$  是公差为  $d$  的等差数列,  $\{b_n\}$  是公比为  $q$  的等比数列. 已知数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = n^2 - n + 2^n - 1 (n \in \mathbb{N})$ , 则  $d+q$  的值是 \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = e^x - a \ln(ax - a) + a (a > 0)$ , 若关于  $x$  的不等式  $f(x) > 0$  恒成立, 则实数  $a$  的取值

范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0$ ) 的图象如图所示



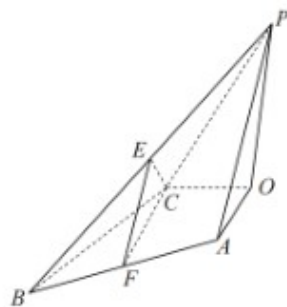
(1) 求函数  $f(x)$  的对称中心;

(2) 先将函数  $y=f(x)$  图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 3 倍 (横坐标不变), 然后将得到的函数图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 最后将所得图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位后得到函数  $y=g(x)$  的图象.

若  $|g(x) - t| \leq 1$  对任意的  $x \in [-\frac{5\pi}{12}, 0]$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥  $P-OABC$  中, 已知  $OA=OP=1$ ,  $CP=2$ ,  $AB=4$ ,  $\angle CPO = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ ,  $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ ,  $E$  为  $PB$  中点,  $F$  为  $AB$  中点.



(1) 证, 明: 平面  $CEF \parallel$  平面  $PAO$ ;

(2) 若  $PA = \sqrt{3}$ , 求平面  $POC$  与平面  $PAB$  所成夹角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  各项都不为 0,  $a_1=2$ ,  $a_2=4$ ,  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $a_n a_{n+1} = 4S_n$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = a_1 C_n^1 + a_2 C_n^2 + a_3 C_n^3 + \dots + a_{n-1} C_n^{n-1} + a_n C_n^n$ , 求数列  $\left\{ \frac{b_n + 2^{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. (本小题满分 12 分)

2022 年 12 月 15 至 16 日, 中央经济工作会议在北京举行. 关于房地产主要有三点新提法, 其中“住房改善”位列扩大消费三大抓手的第一位. 某房地产开发公司旗下位于生态公园的楼盘贯彻中央经济工作会议精神, 推出了为期 10 天的促进住房改善的惠民优惠售房活动, 该楼盘售楼部统计了惠民优惠售房活动期间到访客户的情况, 统计数据如下表: (注: 活动开始的第  $i$  天记为  $x_i$ , 第  $i$  天到访的人次记为  $y_i, i=1, 2, 3, \dots$ )

$x_i$ (单位: 天)	1	2	3	4	5	6	7
$y_i$ (单位: 人次)	12	22	42	68	132	202	392

(1) 根据统计数据, 通过建模分析得到适合函数模型为  $y=c \cdot d^x$  ( $c, d$  均为大于零的常数). 请根据统计数据及上表中的数据, 求活动到访人次  $y$  关于活动开展的天次  $x$  的回归方程, 并预测活动推出第 8 天售楼部来访的人次;

(2) 该楼盘营销策划部从有意向购房的客户中, 随机通过电话进行回访, 统计有效回访发现, 客户购房意向的决定因素主要有三类:  $A$  类是楼层的品质与周边的生态环境,  $B$  类是楼盘的品质与房子的设计布局,  $C$  类是楼盘的品质与周边的生活与教育配套设施. 统计结果如下表:

类别	$A$ 类	$B$ 类	$C$ 类
频率	0.4	0.2	0.4

从被回访的客户中再随机抽取 3 人聘为楼盘的代言人, 视频率为概率, 记随机变量  $X$  为被抽取的 3 人中  $A$  类和  $C$  类的人数之和, 求随机变量  $X$  的分布列和数学期望

参考数据: 其中  $v_i = \lg y_i, \bar{v} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 v_i = 1.84, \sum_{i=1}^7 x_i v_i = 58.55, 10^{0.84} \approx 6.9$ ;

参考公式: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ , 其回归直线  $\hat{v} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}u$  的斜率和截距的最

$$\text{小二乘估计公式分别为: } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u};$$

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线  $E$  的顶点为  $A(-1,0), B(1,0)$ , 过右焦点  $F$  作其中一条渐近线的平行线, 与另一条渐近线交于点  $G$ , 并  $S_{\triangle OFG} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$  ( $O$  为坐标原点). 点  $P$  为  $x$  轴正半轴上异于点  $B$  的任意点, 过点  $P$  的直线  $l$  交双曲线于  $C, D$  两点, 直线  $AC$  与直线  $BD$  交于点  $H$ .

- (1) 求双曲线  $E$  的标准方程;
- (2) 求证:  $\vec{OP} \cdot \vec{OH}$  为定值.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \ln(x+1) + \sin x + \cos x$ .

- (1) 当  $x \in [0, \pi]$  时, 求证:  $f(x) > 0$ ;
- (2) 若  $f(x) \leq ax + 1$  对  $x > -1$  恒成立, 求  $a$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线