高 三 数 学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-2x<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-1\leqslant x<0\}$　　B. $\{x|0<x\leqslant 1\}$　　C. $\{x|1\leqslant x<2\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x<2\}$

2. 已知复数 z_1,z_2 在复平面内对应的点分别为 $(1,-1)$，$(0,-1)$，则 $\frac{z_1}{z_2}=$

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $1-\mathrm{i}$　　C. $-1+\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

3. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\cos\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$

4. 已知 $(2+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_3=$

A. 10　　B. 20　　C. 40　　D. 80

5. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 θ（其中 θ 为钝角），则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{1}{\sin\theta}$　　B. $\frac{1}{\cos\theta}$　　C. $-\frac{1}{\sin\theta}$　　D. $-\frac{1}{\cos\theta}$

6. 已知圆 $C:x^2+y^2+2ay=0(a>0)$ 截直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 所得的弦长为 $2\sqrt{3}$，则圆 C 与圆 $C':(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 的位置关系是

A. 相离　　B. 外切　　C. 相交　　D. 内切

7. 已知一个棱长为2的正方体玻璃容器内（不计玻璃的厚度）放置一个正四面体，若正四面体能绕着它的中心（即正四面体内切球的球心）任意转动，则正四面体棱长的最大值为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

8. 若 $\mathrm{e}^{-x_1}\cdot x_3=-\ln x_2\cdot x_3=-1$，则下列不等关系一定不成立的是

A. $x_1<x_3<x_2$　　B. $x_3<x_1<x_2$

C. $x_3<x_2<x_1$　　D. $x_1<x_2<x_3$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$a_5=-4$，$S_5=-40$，则

A. $a_{10}=6$　　　　B. $S_{10}=-30$

C. 当且仅当$n=6$时，S_n取最小值　　　　D. $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=0$

10. 已知$x>0$，$y>0$，且$x+2y=2$，则

A. xy的最小值是 1　　　　B. x^2+y^2的最小值是$\frac{4}{5}$

C. 2^x+4^y的最小值是 4　　　　D. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$的最小值是 5

11. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今还在农业生产中得到使用(图 1). 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理(图 2). 一半径为 2 米的筒车水轮如图 3 所示，水轮圆心O距离水面 1 米，已知水轮每 60 秒逆时针匀速转动一圈，如果当水轮上点P从水中浮现时(图中点P_0)开始计时，则


图1

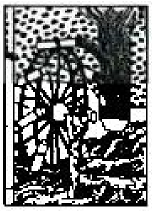


图2

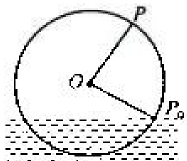


图3

A. 点P再次进入水中时用时 30 秒

B. 当水轮转动 50 秒时，点P处于最低点

C. 当水轮转动 150 秒时，点P距离水面 2 米

D. 点P第二次到达距水面$(1+\sqrt{3})$米时用时 25 秒

12. 将一枚质地均匀的硬币连续抛掷n次，以P_n表示没有出现连续 3 次正面向上的概率，则下列结论正确的是

A. $P_3=\frac{7}{8}$　　　　B. $P_4=\frac{15}{16}$

C. 当$n\geqslant 2$时，$P_{n+1}<P_n$　　　　D. $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}(n\geqslant 4)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}=(-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,4)$，若$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，则$|\boldsymbol{c}|=$________.

14. 写出一条同时满足下列条件①②③的直线的方程：________.

①斜率小于 0；②在x轴上的截距大于 0；

③与双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$有且仅有一个公共点.

15. 某学校在 2022 年 1 月高三期末考试中有 980 人参加了数学考试，若数学成绩$X\sim N(95,\sigma^2)$(满分为 150 分)，统计结果显示数学考试成绩在 70 分以上的人数为总人数的$\frac{11}{14}$，则此次高三期末考试中数学成绩在 70 分到 120 分之间的学生有________人.

16. 已知A，B为抛物线$C:y^2=4x$上两点，O为坐标原点，若$OA\perp OB$，直线AB必过定点，则定点的坐标为________；$\triangle ABO$的面积的最小值是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1, 2a_{n+1}=4a_n-1$.

(1)证明：数列$\{2a_n-1\}$是等比数列；

(2)求数列$\{n(2a_n-1)\}$的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

我国政府加大了对全民阅读的重视程度，推行全民阅读工作，全民阅读活动在全国各地蓬勃发展，活动规模不断扩大，内容不断充实，方式不断创新，影响日益扩大，使我国国民素质得到了大幅度提高.某高中为响应政府号召，在寒假中对本校高三 800 名学生(其中男生 480 名)按性别采用分层抽样的方法抽取 200 名学生进行调查，了解他们每天的阅读情况.

	每天阅读时间低于 1 h	每天阅读时间不低于 1 h	总计
男生		60	
女生	20		
总计			200

(1)根据所给数据，完成 2×2 列联表；

(2)根据(1)中的列联表，判断能否有 99.9%的把握认为该高中高三学生"每天阅读时间低于 1 h"与"性别"有关？

(3)若从抽出的 200 名学生中按"每天阅读时间是否低于 1 h"采用分层抽样抽取 10 名学生准备进行读写测试，在这 10 名学生中随机抽取 3 名学生，记这 3 名学生每天阅读时间不低于 1 h 的人数为 X，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

19.（本小题满分 12 分）

在$\triangle ABC$中，已知 D 是边 BC 上一点，且 $BC=3, BD=1, \angle BAC=3\angle BAD, \sin\angle BAD=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(1)求$\dfrac{AB}{AC}$的值；

(2)求 AC 的长.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 经过点 $P\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$,$Q\left(\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

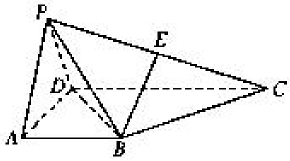
(2)过点 $R(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M,N(均与 P 不重合),证明:直线 PM,PN 的斜率之和为定值.

21.(本小题满分 12 分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA=PD$,$AB/\!/CD$,$CD\perp AD$,$CD=2AB$,点 E 为 PC 的中点,且 $BE\perp$平面 PCD.

(1)求证:$CD\perp$平面 PAD;

(2)若二面角 $P-BD-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{7}$,求直线 PC 与 AB 所成角的正切值.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2(a\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=-\frac{1}{2}$,求 $f(x)$的极值;

(2)当 $a<0$ 时,证明:$f(x)$不存在两个零点.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. B　因为 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x|x^2-2x<0\}=\{x|0<x<2\}$, 所以 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$. 故选 B.

2. A　因为复数 z_1,z_2 在复平面内对应的点分别为 $(1,-1),(0,-1)$, 所以 $z_1=1-\mathrm{i}$, $z_2=-\mathrm{i}$. 所以 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{-\mathrm{i}^2}=1+\mathrm{i}$. 故选 A.

3. A　由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, 得 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, 则 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 故选 A.

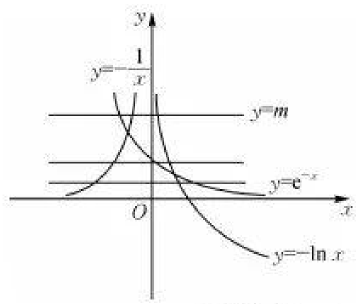
4. C　因为 $(2+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$, 所以 $a_3=C_5^3 2^2=40$. 故选 C.

5. D　由题意, $\tan\theta=-\frac{b}{a}$, 所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{|\cos\theta|}=-\frac{1}{\cos\theta}$. 故选 D.

6. C　圆 C 的圆心为 $(0,-a)$, 半径为 a, 其圆心到直线 $\sqrt{3}x-y=0$ 的距离为 $\frac{|a|}{\sqrt{3+1}}=\frac{a}{2}$, 所截得的弦长为 $2\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{3}a=2\sqrt{3}$, 解得 $a=2$, 所以 $C: x^2+(y+2)^2=4$, C 的圆心为 $(0,-2)$, 半径为 2; 又 C' 的圆心为 $(1,-1)$, 半径为 1, $|CC'|=\sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{2}$, 可得 $2-1<|CC'|<2+1$, 则两圆的位置关系是相交. 故选 C.

7. B　一个正四面体可以在一个棱长为 2 的正方体内绕着正四面体中心任意转动, 说明正四面体最大时为该正方体内切球的内接正四面体. 该正方体内切球的半径为 1, 则该球的内接正方体棱长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 而球的内接正四面体的棱长为内接正方体棱长的 $\sqrt{2}$ 倍, 即为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 故选 B.

8. D　由 $e^{-x_1}\cdot x_3=-\ln x_2\cdot x_3=-1$, 得 $e^{-x_1}=-\ln x_2=-\frac{1}{x_3}$. 由 $e^{-x_1}>0$, 得 $0<x_2<1$, $x_3<0$, 作函数 $y=e^{-x}$, $y=-\ln x$, $y=-\frac{1}{x}(x<0)$ 的图象, 再作直线 $y=m$,



变换 m 的值, 可发现: $x_1<x_3<x_2$, $x_3<x_1<x_2$, $x_3<x_2<x_1$ 均能够成立, 只有 D 不可能成立. 故选 D.

9. AB　设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 由 $a_5=-4$, $S_5=-40$, 得 $\begin{cases}a_1+4d=-4,\\ 5a_1+\frac{5\times4}{2}d=-40.\end{cases}$ 解得 $a_1=-12$, $d=2$, 所以 $a_n=2n-14$, $S_n=n^2-13n$, 则 $a_{10}=6$, $S_{10}=-30$, A, B 正确; 令 $a_n=2n-14\leqslant 0$, 得 $n\leqslant 7$, 且 $a_7=0$, 则 $n=6$ 或 $n=7$ 时, S_n 取最小值,

C 不正确；因为 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=5a_7=0$，所以 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=6\neq0$（或 $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=6a_5+\frac{6\times5}{2}d=6\times(-4)+15\times2=6\neq0$），D 不正确. 故选 AB.

10. BC　由已知，得 $x+2y=2\geqslant2\sqrt{2xy}$，则 $xy\leqslant\frac{1}{2}$，当且仅当 $x=2y=1$ 时取等号，所以 xy 的最大值是 $\frac{1}{2}$，A 错误；$x^2+y^2=(2-2y)^2+y^2=5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geqslant\frac{4}{5}$，当且仅当 $x=\frac{2}{5}$，$y=\frac{4}{5}$ 时取等号，所以 x^2+y^2 的最小值是 $\frac{4}{5}$，B 正确；$2^x+4^y\geqslant2\sqrt{2^{x+2y}}=4$，当且仅当 $x=2y=1$ 时取等号，所以 2^x+4^y 的最小值是 4，C 正确；$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}\right)(x+2y)=\frac{1}{2}\left[5+2\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right]\geqslant\frac{9}{2}$，当且仅当 $x=y=\frac{2}{3}$ 时取等号，所以 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值是 $\frac{9}{2}$，D 错误. 故选 BC.

11. BCD　角速度 $\omega=\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$ 弧度/秒，水轮的半径为 2 米且圆心 O 距离水面 1 米可知，半径 OP_0 与水面所成角为 $\frac{\pi}{6}$，点 P 再次进入水中用时为 $\frac{\pi+2\times\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{30}}=40$ 秒，故 A 错误；当水轮转动 50 秒时，半径 OP_0 转动了 $50\times\frac{\pi}{30}=\frac{5\pi}{3}$ 弧度，而 $\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，点 P 正好处于最低点，故 B 正确；以 O 为原点，以与水平面平行的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，则点 P 距离水面的高度 $H=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1$，当水轮转动 150 秒时，将 $t=150$ 代入，得 $H=2$，点 P 距离水面 2 米，故 C 正确；将 $H=1+\sqrt{3}$ 代入 $H=2\sin\left(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 中，得 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3}$，或 $\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，即 $t=60k+15$，或 $t=60k+25$，这里 $k\in\mathbf{N}$，可见，点 P 第二次到达距水面 $(1+\sqrt{3})$ 米时用时 25 秒，故 D 正确. 故选 BCD.

12. ACD　当 $n=3$ 时，$P_3=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$，A 正确；

当 $n=4$ 时，出现连续 3 次正面的情况可能是：正正正反、正正正正、反正正正，

所以 $P_4=1-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{13}{16}$，B 错误；

要求 P_n，即抛掷 n 次没有出现连续 3 次正面的概率，分类进行讨论：

若第 n 次反面向上，前 $n-1$ 次未出现连续 3 次正面即可；

若第 n 次正面向上，则需要对第 $n-1$ 进行讨论，依次类推，得到下表：

第 n 次	$n-1$ 次	$n-2$ 次	概率
反面			$\frac{1}{2}P_{n-1}$
正面	反面		$\frac{1}{4}P_{n-2}$
正面	正面	反面	$\frac{1}{8}P_{n-3}$

所以 $P_n=\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}\ (n\geqslant4)$，D 正确；

由上式可得 $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2}$，则 $P_{n+1}-\frac{1}{2}P_n=(\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}P_{n-1}+\frac{1}{8}P_{n-2})-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_{n-1}+\frac{1}{4}P_{n-2}+\frac{1}{8}P_{n-3}\right)$

$=\frac{1}{2}P_n-\frac{1}{16}P_{n-3}$，易知 $P_n>0$，所以 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{16}P_{n-3}<0,(n\geqslant4)$，故当 $n\geqslant4$ 时，$P_{n+1}<P_n$.

又 $P_1=P_2=1,P_3=\frac{7}{8},P_4=\frac{13}{16}$，满足当 $n\geqslant2$ 时，$P_{n+1}<P_n$，C 正确. 故选 ACD.

13. $3\sqrt{2}$　设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，得 $x=-y,y-x+6=0$，解得 $x=3,y=-3$，所以 $|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{2}$.

14. $y=-\frac{1}{2}x+1$（答案不唯一）　只要与渐近线 $y=-\frac{1}{2}x$ 平行，且在 x 轴上的截距大于 0 即可.

15. 560　因为数学成绩 $X\sim N(95,\sigma^2)$，所以其正态分布曲线关于直线 $x=95$ 对称，又因为成绩在 70 分以上的人数为总人数的 $\frac{11}{14}$，由对称性知成绩在 70 分到 120 分之间的人数为总人数的 $2\times\left(\frac{11}{14}-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{7}$，所以此次数学考试成绩在 70 分到 120 分之间的学生有 $980\times\frac{4}{7}=560$（人）.

16. $(4,0)$（2 分）　16（3 分）　设直线 AB 的方程为 $x=my+n$，点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 由 $\begin{cases}x=my+n,\\y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4n=0$，所以 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4n,x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=n^2$，所以 $n^2-4n=0$，解得 $n=0$ 或 $n=4$. 当 $n=0$ 时，直线 AB 过原点，不满足题意；当 $n=4$ 时，直线 AB 的方程为 $x=my+4$，过定点 $P(4,0)$，$\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{1}{2}|OP|\cdot|y_1-y_2|=2|y_1-y_2|=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{16m^2+64}\geqslant16$，即当 $m=0$ 时，$\triangle ABO$ 的面积取得最小值 16.

17. (1)证明：由 $2a_{n+1}=4a_n-1$，得 $2a_{n+1}-1=4a_n-2=2(2a_n-1)$. ……………………………… 2 分

又 $2a_1-1=1\neq0$，所以 $2a_n-1\neq0$，于是 $\frac{2a_{n+1}-1}{2a_n-1}=2$，所以 $\{2a_n-1\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列. ………… 4 分

(2)解：由(1)得 $2a_n-1=2^{n-1}$，则 $n(2a_n-1)=n\cdot2^{n-1}$，

$S_n=1\times1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n-1)\times2^{n-2}+n\times2^{n-1}$，①

$2S_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+4\times2^4+\cdots+(n-1)\times2^{n-1}+n\times2^n$，② ……………………………… 6 分

①－②，得 $-S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}-n\times2^n$

$=\frac{1-2^{n-1}\times2}{1-2}-n\times2^n$

$=(1-n)\times2^n-1$. ……………………………… 8 分

所以 $S_n=(n-1)\times2^n+1$. ……………………………… 10 分

18. 解：(1)200 名学生中，男生人数为 $200\times\frac{480}{800}=120$，女生人数为 $200-120=80$，补全列联表如下：

	每天阅读时间低于 1 h	每天阅读时间不低于 1 h	总计
男生	60	60	120
女生	20	60	80
总计	80	120	200

……………………………… 3 分

(2)根据列联表可得：$K^2=\frac{200\times(60\times60-20\times60)^2}{120\times80\times120\times80}=\frac{25}{2}=12.5>10.828$，所以有 99.9% 的把握认为该高中高三学生

“每天阅读时间低于 1h”与“性别”有关. ………………………………………………………………………………… 6 分

(3)200 名学生中“每天阅读时间不低于 1 h”的人数为 120 人,因此抽取 10 名学生“每天阅读时间不低于 1 h”的人数为 6 人,而 X 的所有可能取值为 0,1,2,3,则

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$,$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$,$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{2}$,$P(X=3)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$.

……… 10 分

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

$E(X)=0\times\frac{1}{30}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1.8$. ……………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)在$\triangle ABD$ 中,由正弦定理,得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{1}{\sin\angle BAD}$;① ……………………… 2 分

在$\triangle ADC$ 中,由正弦定理,得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{2}{\sin\angle CAD}$. ② ……………………………… 4 分

又$\angle ADB+\angle ADC=180°$,则 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB$.

①÷②,得

$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle CAD}{2\sin\angle BAD}=\frac{\sin 2\angle BAD}{2\sin\angle BAD}=\cos\angle BAD=\sqrt{1-\sin^2\angle BAD}=\sqrt{1-\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………… 6 分

(2)由(1)可设 $AB=\sqrt{3}x$,$AC=3x$, ………………………………………………………………………… 7 分

$\cos\angle BAC=\cos 3\angle BAD=\cos(\angle BAD-2\angle BAD)=4\cos^3\angle BAD-3\cos\angle BAD=-\frac{5}{9}\sqrt{3}$. ………………… 9 分

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理,得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$, ……………………………………… 10 分

即 $9=3x^2+9x^2+2\times\sqrt{3}\times3\times\frac{5\sqrt{3}}{9}x^2=22x^2$,解得 $x=\frac{3\sqrt{22}}{22}$. ……………………………………… 11 分

所以 $AC=3x=\frac{9\sqrt{22}}{22}$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)解:设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m,n>0$ 且 $m\neq n)$, ………………………………………………… 1 分

由题意得$\begin{cases}m+\frac{9}{4}n=1,\\3m+\frac{3}{4}n=1,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{4}$,$n=\frac{1}{3}$, ……………………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)证明:当直线 l 的斜率不存在时,M,N 为椭圆的上下顶点,即为$(0,\pm\sqrt{3})$,

则 $k_{PM}+k_{PN}=\frac{\sqrt{3}+\frac{3}{2}}{1}+\frac{-\sqrt{3}+\frac{3}{2}}{1}=3$. ………………………………………………………… 5 分

当直线 l 的斜率存在时,设 l 的方程为 $y=kx+2$.

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+2,\end{cases}$ 消去 y 并整理，得$(3+4k^2)x^2+16kx+4=0$，

则 $\Delta=256k^2-16(3+4k^2)>0$，得 $k^2>\dfrac{1}{4}$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{16k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{3+4k^2}$，…………………………………… 7 分

所以 $k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{y_1+\frac{3}{2}}{x_1+1}+\dfrac{y_2+\frac{3}{2}}{x_2+1}$

$=\dfrac{kx_1+\frac{7}{2}}{x_1+1}+\dfrac{kx_2+\frac{7}{2}}{x_2+1}$

$=2k+\dfrac{1}{2}\cdot(7-2k)\cdot\dfrac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}$

$=2k+\dfrac{1}{2}\cdot(7-2k)\cdot\dfrac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}$ …………………………………… 9 分

$=2k+\dfrac{1}{2}(7-2k)\dfrac{-\frac{16k}{3+4k^2}+2}{\frac{4}{3+4k^2}-\frac{16k}{3+4k^2}+1}$

$=2k-\dfrac{1}{2}(2k-7)\dfrac{8k^2-16k+6}{4k^2-16k+7}$

$=2k-(2k-7)\dfrac{(2k-3)(2k-1)}{(2k-7)(2k-1)}$

$=2k-(2k-3)=3$． …………………………………… 10 分

说明：$2k-7\neq0$．若 $2k-7=0$，则 $4k=14$，$4k^2=49$，点 M，N 的横坐标满足方程 $52x^2+56x+4=0$，即 $13x^2+14x+1=0$，

即$(13x+1)(x+1)=0$，故 M，N 中一点的坐标为$\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$，与题设条件矛盾，故 $2k-7\neq0$．

综上，直线 PM，PN 的斜率之和为定值． …………………………………… 12 分

21．(1)证明：取 PD 的中点 F，连接 AF，EF， …………………………………… 1 分

则 $EF/\!/CD$，$EF=\dfrac{1}{2}CD$．又 $AB/\!/CD$，$AB=\dfrac{1}{2}CD$，所以 $EF/\!/AB$，$EF=AB$，则四边形 $ABEF$ 为平行四边形，

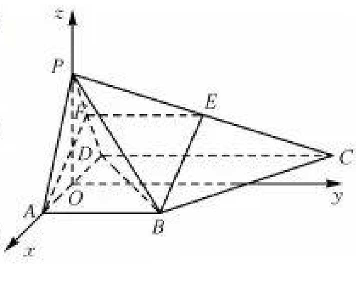
所以 $AF/\!/BE$． …………………………………… 3 分

又 $BE\perp$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，所以 $BE\perp CD$，所以 $AF\perp CD$． …………………………………… 4 分

又 $CD\perp AD$，$AF\cap AD=A$，AF，$AD\subset$平面 PAD，所以 $CD\perp$平面 PAD． …………………………………… 5 分

(2)解：由题意，得 $BE\perp PD$，又 $AF/\!/BE$，则 $AF\perp PD$，结合 F 为 PD 的中点，得 $AP=AD$．

又 $AP=PD$，所以$\triangle PAD$ 为等边三角形． …………………………………… 6 分



设 $PD=1$，$AB=t>0$，则 $CD=2t$．取 AD 的中点 O，连接 PO，

易知 $PO\perp$平面 $ABCD$，过 O 作 AB 的平行线，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，

则$D\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$，$B\left(\frac{1}{2},t,0\right)$，$P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，…………………………………………………… 7分

所以$\overrightarrow{DB}=(1,t,0)$，$\overrightarrow{PB}=\left(\frac{1}{2},t,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$． …………………………………………………… 8分

设$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面PBD的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}x+ty=0,\\ \frac{1}{2}x+ty-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0.\end{cases}$

取$x=3$，则$\boldsymbol{n}_1=\left(3,\frac{-3}{t},-\sqrt{3}\right)$为平面$PBD$的一个法向量． …………………………………… 9分

又平面BCD的一个法向量$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$，

设二面角$P-BD-C$的平面角为θ，易知θ为钝角，

所以$\cos\theta=-|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=-\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{12+\frac{9}{t^2}}}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$，所以$t^2=1$，则$t=1$，$CD=2t=2$． …………… 10分

由$AB/\!/CD$，$CD\perp PD$，可得$\angle PCD$为直线PC与AB所成的角．

在$\mathrm{Rt}\triangle PCD$中，$\tan\angle PCD=\frac{PD}{CD}=\frac{1}{2}$．

故PC与AB所成角的正切值为$\frac{1}{2}$． …………………………………………………………………… 12分

22．(1)解：若$a=-\frac{1}{2}$，$f(x)=(x-2)e^x-\frac{1}{2}(x-1)^2$，得$f'(x)=(x-1)(e^x-1)$． …………………………………… 1分

方程$f'(x)=0$的两个根是0和1． …………………………………………………………………… 2分

当$x<0$或$x>1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$上单调递增；

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，

故$f(x)$在$x=0$时取极大值$f(0)=-\frac{5}{2}$，在$x=1$时取极小值$f(1)=-e$． …………………………………… 5分

(2)证明：$f'(x)=(x-1)(e^x+2a)$．

当$a<0$，关于x的方程$f'(x)=0$的根是1和$\ln(-2a)$． ……………………………………………………… 6分

(ⅰ)若$\ln(-2a)=1$，此时$f'(x)=(x-1)(e^x-e)$，$f'(x)\geqslant0$恒成立，此时仅有一个$x=1$，使得$f'(x)=0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递增，故$f(x)$不存在两个零点； …………………………………………………………… 8分

(ⅱ)若$\ln(-2a)>1$，即$a<-\frac{e}{2}$，当$x<1$或$x>\ln(-2a)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$1<x<\ln(-2a)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；又$f(1)=-e<0$，结合上述单调性可知，$f(x)$不存在两个零点；…………………………………… 10分

(ⅲ)若$\ln(-2a)<1$，即$-\frac{e}{2}<a<0$，当$x>1$或$x<\ln(-2a)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当$\ln(-2a)<x<1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$f(x)$的极大值为$f(\ln(-2a))=[\ln(-2a)-2]\cdot(-2a)+a[\ln(-2a)-1]^2=a\{[\ln(-2a)-2]^2+1\}<0$，

结合上述单调性可知，$f(x)$不存在两个零点．

所以当$a<0$时，$f(x)$不存在两个零点． ………………………………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。