数学参考答案

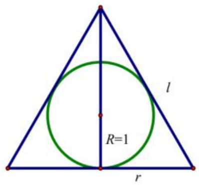
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	B	A	D	C	D	A	ABC	AD	BCD	BD

1.【解析】$B=\{x|x<2或x>4\}$，所以 $A\cap B=\{1,5,6\}$，故选 C.

2.【解析】$z=\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，故选 D.

3.【解析】因为 $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2$，所以 $\cos\alpha+2\sin\alpha=2$，$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^2\alpha=4$，

$4\sin\alpha\cos\alpha=3\cos^2\alpha$，$\tan\alpha=\frac{3}{4}$ 或 $\tan\alpha=0$（舍去），故选 B.



4.【解析】设底面半径为 r，由已知得 $r=\sqrt{3}$，高为 $h=3$.故体积为 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=3\pi$.

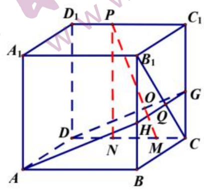
5.【解析】由已知 $f(-x)=\ln\left(-2x+\sqrt{4x^2+a}\right)=\left[\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+a}\right)-\ln a\right]$，因为

$f(-x)=-f(x)$，故 $\ln a=0$，所以 $a=1$，故 $f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)$. $f\left(\sqrt{2}\right)=\ln\left(2\sqrt{2}+3\right)=2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

6.【解析】一次分形长度为 $a_1=\frac{4}{3}$，二次分形长度为 $a_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2$，5 次分形长度为 $a_5=\left(\frac{4}{3}\right)^5=4\frac{52}{243}$,故选 C.

7.【解析】设 $\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=3m$，则 $\left|\overrightarrow{QF_2}\right|=2m$，$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=2a-3m$，$\left|\overrightarrow{QF_1}\right|=2a-2m$.

在 ΔPQF_1 中得：$(2a-3m)^2+25m^2=(2a-2m)^2$，即 $m=\frac{2}{15}a$.在 ΔPF_1F_2 中得：$\frac{64}{25}a^2+\frac{4}{25}a^2=4c^2$，故 $e=\frac{\sqrt{17}}{5}$.



8.【解析】过点 Q 作 $GH//BC$，$PM\perp DG$，$PN\perp CD$,设 $CG=t,PD_1=s$，

则 $t,s\in[0,1]$，$S_{\Delta ADQ}=\frac{1}{2}AD\times DG=\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}$，$PM=DG=\sqrt{1+t^2}$，

$OM=DM\sin CDG=(t+s)\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，$OP=\sqrt{1+t^2}-(s+t)\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1-st}{\sqrt{1+t^2}}$，

故四面体 $PQAD$ 的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\times\frac{1-st}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{6}(1-st)$，当 $st=0$ 时，其最大值为 $\frac{1}{6}$，故 A 正确.

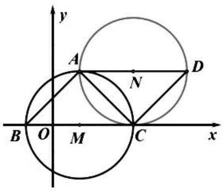
9.【解析】可求甲乙平均数为 $\bar{x}_1=\bar{x}_2=7$，中位数均为 7，故 A，B 正确；甲的极差为 6，乙的极差为 4，故 C 正确；甲的标准差为：$\frac{1}{7}\times(1+4+4+9+4+9+9)=\frac{40}{7}$，乙的标准差为：$\frac{1}{7}\times(4+4+1+1+1+1)=\frac{12}{7}$，故 D 错误.

10.【解析】由已知 A,B 为单位圆上任意两点，$|OA|=|OB|=1$，$\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=|AB|\le 2$，A 正确；设 D 为 AB 的

中点，则 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2|PD|\le 6$，故 B 错误；当 P,A,B 共线时，$\left|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right|=|AB|\le 2$，故 C 错误；当 P,A,B 共线时，$\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2|PD|\le 4$，故 D 正确.

11.【解析】 $f'(x)=2x-3-\dfrac{1}{x\ln a}$，由 $f'(1)=0$，故 $\ln a=-1$，所以 $a=\dfrac{1}{e}$，$f(x)=x^2-3x+\ln x$，此时 $f'(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$，$f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right),(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 单调递减. $f(x)$ 极小值为 $f(1)=-2$，故 $f\left(\dfrac{3}{5}\right)>f(1)$.又 $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{11}{16}-\ln 4<-2=f(1)$，故 BCD 正确.

12.【解析】可求 $D(5,2)$，由 $AB\perp BC,BC\perp CD$，$\odot M$ 的方程为：$(x-1)^2+y^2=4$，$\odot N$ 的方程为：$(x-3)^2+(y-2)^2=4$，$MN=2\sqrt{2}$，P,Q 两点之间的距离的最大值为 $2\sqrt{2}+4$，故 A 错误.由已知 $PQ//MN$，故直线 PQ 的斜率为1，所以 B 正确.当 PQ 斜率为 0 时，直线 PQ 被 $\odot M$ 截得的弦长为 4，当 PQ 斜率不为 0 时，直线 PQ 被 $\odot M$ 截得的弦长不为 4，故 C 错误.当 DP 与 $\odot M$ 相切时，$\tan\angle ADP$ 最大，此时 $\tan\angle ADM=\dfrac{1}{2}$，故 $\tan\angle ADP=\dfrac{4}{3}$，所以 D 正确.



13.【答案】15【解析】展开式第 $r+1$ 项为：$T_{r+1}=C_6^r x^{3r-6}$，由 $3r-12=0$，得 $r=4$，故常数项为 $C_6^4=15$.

14.【答案】$\left(-\pi,-\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left[-\pi,-\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 或 $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，$\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 等【解析】因为 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，由 $x\in[0,\pi]$，$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递减，由对称性可知在 $\left[-\pi,-\dfrac{3}{4}\pi\right]$ 上单调递增.

15.【答案】$\dfrac{5}{2}$【解析】由已知得 $F(0,1)$，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$ 代入 $x^2=4y$ 整理得 $x^2-4kx-4=0$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，故 $x_1+x_2=4k$，① $x_1x_2=-4$ ②，又 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，故 $x_1=-4x_2$③。由①②③解得 $k^2=\dfrac{9}{16}$.此时，$AB=y_1+y_2+2=k(x_1+x_2)+4=4(k^2+1)$，$O$ 到 AB 距离为：$d=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.故 ΔOAB 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot d=2\sqrt{k^2+1}=\dfrac{5}{2}$.

16.【答案】$(1,e)$【解析】$f'(x)=2x-2\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}+\dfrac{1}{\ln a}\right)=\dfrac{2}{\ln a}(x\ln a-1-\ln x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等的实数根，故 $0<\ln a<1$，解得 $a\in(1,e)$.

17.【解析】（1）由已知及正弦定理得：$(a+b)(a-b)=c(b+c)$，即 $b^2+c^2-a^2=-bc$ ……… 2 分

由余弦定理得：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{2}$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ ……… 3 分

故 $C=\pi-\left(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{12}$，

所以 $\sin C=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ……… 5 分

（2）由（1）知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，又 $AD\perp AC$，所以 $\angle BAD=\dfrac{\pi}{6}$，$\angle ADB=\dfrac{7\pi}{12}$

$\sin\angle ADB=\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ……… 7 分

在 ΔABD 中，由正弦定理得：

$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin B}$，所以 $AB=\dfrac{AD\sin\dfrac{7\pi}{12}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ ……… 10 分

18.【解析】（1）由已知，由已知 $b_1=a_2=3$，又 $b_1+2=a_2+2=5$

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=a_{2n}=a_{2n-1}+2=2a_{2n-2}+2=2b_{n-1}+2$ ……… 2 分

故 $b_n+2=2(b_{n-1}+2)$，

所以数列 $\{b_n+2\}$ 是首项为 5，公比为 2 的等比数列 ……… 4 分

（2）由（1）知：$b_n=5\times 2^{n-1}-2$ ……… 6 分

$T_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=2(b_1+b_2+\cdots+b_n)-2n$ ……… 8 分

设 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=5\times(1+2+\cdots+2^{n-1})-2n=5\times 2^n-2n-5$ ……… 10 分

故 $T_{2n}=2S_n-2n=5\times 2^{n+1}-6n-10$ ……… 12 分

19.【解析】（1）记 A,B,C,D,E 参赛获胜事件分别用 A,B,C,D,E 表示，

5 场全胜的概率为：$P(ABCDE)=0.4\times 0.5\times 0.6\times 0.7\times 0.8=0.0672$ ……… 2 分

甲班至多获胜 4 场与 5 场全胜为对立事件，故甲班至多获胜 4 场的概率为

$P=1-P(ABCDE)=1-0.0672=0.9328$

甲班至多获胜 4 场的概率为 0.9328 ……… 4 分

（2）记 BCD 三人组合班级得分为 Y，Y 的取值分别为 $0,7,6,5,11,12,13,18$，由已知得

$P(Y=0)=0.5\times 0.4\times 0.3=0.06$，$P(Y=7)=0.5\times 0.4\times 0.3=0.06$

$P(Y=6)=0.5\times0.6\times0.3=0.09$，$P(Y=5)=0.5\times0.4\times0.7=0.14$

$P(Y=11)=0.5\times0.6\times0.7=0.21$，$P(Y=12)=0.5\times0.4\times0.7=0.14$

$P(Y=13)=0.5\times0.6\times0.3=0.09$，$P(Y=18)=0.5\times0.6\times0.7=0.21$ ……………………………………10 分

$E(Y)=7\times0.06+6\times0.09+5\times0.14+11\times0.21+12\times0.14+13\times0.09+18\times0.21=10.6$

因为$E(Y)=10.6>10$，所以 BCD 三人组合具有参赛资格……………………………………………12 分

20.【解析】（1） 由已知可得：$BC=2$，$PB=2$，$PC=CD=AB=2\sqrt{2}$

在ΔPBC中， $PB^2+BC^2=PC^2$，故$PB\perp BC$ ……………………………………………………2 分

又$AB\perp BC$，且$PB\cap AB=B$ ，$BC\perp$平面PAB

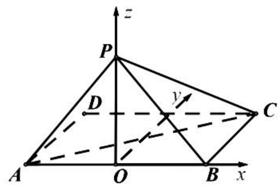
因为$BC\subset$ ABC ，所以平面$PAB\perp$平面PBC ……………………………………………………4 分

（2）取AB、CD的中点O、E，连接OP,OE.

因为$PA=PB$，所以$PO\perp AB$，

由（1）知：平面$PAB\perp$平面ABC ，………………6 分

所以 $PO\perp$平面ABC.



以OB,OE,OP所在直线分别为x,y,z轴，建立空间直角坐标系。

则$A(-\sqrt{2},0,0),B(\sqrt{2},0,0),C(\sqrt{2},2,0),P(0,0,\sqrt{2})$ ……………………………………………8 分

设平面APC的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AC}=(2\sqrt{2},2,0),\overrightarrow{AP}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$

$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0$，故$\begin{cases}2\sqrt{2}x_1+2y_1=0\\ \sqrt{2}x_1+\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$，

取$x_1=1,y_1=-\sqrt{2},z_1=-1$ ，则$\vec{m}=(1,-\sqrt{2},-1)$ ……………………………………………10 分

又平面APC的法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$， $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\dfrac{1}{2}$。

所以二面角$P-AC-B$的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ……………………………………………………12 分

21.【解析】（1）由已知得：$e=\dfrac{c}{a}=2$，$c=2a$ ，所以$b^2=3a^2$ ， 又$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{36}{b^2}=1$，……………2 分

解得$a^2=4$ ，$b^2=12$ ，故双曲线C的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ ……………………………………4 分

（2）设直线l的方程为$y=kx+m$，与$C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$联立整理得：

$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-12=0$，由已知 $k\neq\pm\sqrt{3}$。

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\dfrac{2km}{3-k^2}$，$x_1x_2=-\dfrac{m^2+12}{3-k^2}$ ① ······6 分

由 $PM\perp PN$ 得：$(1+k^2)x_1x_2+(km-6k-4)(x_1+x_2)+(m-6)^2+16=0$ ② ······8 分

由①②联立得：$m^2-32k^2-4km-18m+72=0$，即 $(m+4k-6)(m-8k-12)=0$，

由已知 l 不经过点 $(4,6)$，故 $m+4k-6\neq0$，所以 $m-8k-12=0$ 故 $m=8k+12$， ······10 分

$l:y=k(x+8)+12$，过定点 $(-8,12)$

当 $l\perp x$ 轴时，设 $M(x_1,y_1),N(x_1,-y_1)$，解得 $x_1=-8$，满足条件

故直线 l 过定点 $(-8,12)$ ······12 分

22.【解析】（1）设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的切点坐标为 $\left(x_0,e^{ax_0}\right)$，

由 $f'(x)=ae^{ax}$，得 $f'(x_0)=ae^{ax_0}$.

故切线方程为：$y-e^{ax_0}=ae^{ax_0}(x-x_0)$

即 $y=ae^{ax_0}x+(1-ax_0)e^{ax_0}$，又切线方程为 $y=2x+1$，

所以 $ae^{ax_0}=2$ ①，且 $(1-ax_0)e^{ax_0}=1$ ② ······2 分

设 $\varphi(t)=(1-t)e^t$，$\varphi'(t)=-te^t$，

当 $t\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$ 单调递增；

当 $t\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$ 单调递减。

$\varphi(t)$ 最大值为 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(0)=1$，

由②可得：$ax_0=0$ 代入①得：$a=2$ ······4 分

故 $y=f(x)-g(x)=e^{2x}-2x-1$，$y'=2(e^{2x}-1)$

所以 $y=f(x)-g(x)$ 递减区间为 $(-\infty,0)$，递增区间为 $(0,+\infty)$ ······5 分

（2）由（1）知 $f(x)=e^{2x}$，故 $y_1=me^{2x_1},y_2=me^{2x_2}$，

① $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 关于 y 轴的对称点为 $A'(-x_1,y_1)$，$B(-x_2,y_2)$，

由已知得：$me^{2x_1}=-2x_1+1,me^{2x_2}=-2x_2+1$，即 $m=(-2x+1)e^{-2x}$ 有两个不等的实根 x_1,x_2 ……6 分

令 $G(x)=(-2x+1)e^{-2x}$，$G'(x)=4(x-1)e^{-2x}$，

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$G'(x)<0$，$G(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$G'(x)>0$，$G(x)$ 单调递增

$G(x)\min=G(1)=-\frac{1}{e^2}$

又 $x\to-\infty,G(x)\to+\infty,x\to+\infty,G(x)\to0$，且 $G\left(\frac{1}{2}\right)=0$

故实数 m 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{e^2},0\right)$ ……………………………………………………8 分

②不妨设 $\frac{1}{2}<x_1<1<x_2$，要证明 $x_1+x_2>2$，即证 $x_1>2-x_2$，

因为当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$G(x)$ 单调递减，故只需证 $G(x_1)<G(2-x_2)$，

又 $G(x_1)=G(x_2)$，即证明 $G(x_2)-G(2-x_2)<0$ ……………………………………………………10 分

令 $F(x)=G(x)-G(2-x)(x>1)$，

$F'(x)=G'(x)+G'(2-x)=4(x-1)e^{-2x}+4(1-x)e^{2x-4}=4(x-1)\left(e^{-2x}-e^{2x-4}\right)$

因为 $x>1$，故 $2x-4>-2x$，故 $F'(x)<0$，$F(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减，

所以 $F(x)<F(1)=0$。故 $F(x_2)<0$，即 $G(x_2)-G(2-x_2)<0$，

所以 $x_1+x_2>2$ ……………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。