2021 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（初赛）暨 2021 全国高中数学联合竞赛 加试（A 卷）参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不得增加其他中间档次.

一．**（本题满分 40 分）** 给定正整数 $k\,(k\ge 2)$ 与 k 个非零实数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$．证明：至多有有限个 k 元正整数组 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$，满足 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 互不相同，且

$$a_1\cdot n_1!+a_2\cdot n_2!+\cdots+a_k\cdot n_k!=0.$$

证明：取定正整数 $N\ge\dfrac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_k|}{\min\limits_{1\le i\le k}|a_i|}$（注意 $a_1,a_2,\cdots,a_k\ne 0$）.

我们证明，当正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 满足条件时，必有 $\max\limits_{1\le i\le k}n_i\le N$.

假设不然，不妨设 $\max\limits_{1\le i\le k}n_i=n_1>N$．对 $i=2,\cdots,k$，由于正整数 $n_i<n_1$，故

$$n_i!\le(n_1-1)!=\frac{n_1!}{n_1}<\frac{n_1!}{N}.$$ ···············20 分

从而

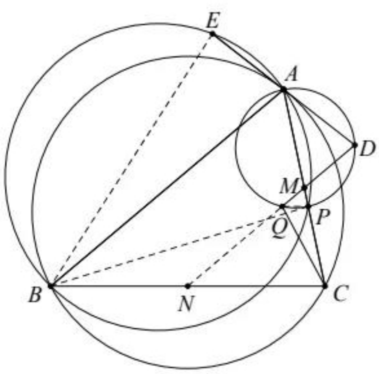
$$|a_2\cdot n_2!+\cdots+a_k\cdot n_k!|\le\sum_{i=2}^{k}|a_i|\cdot n_i!<\frac{n_1!}{N}\sum_{i=2}^{k}|a_i|<\frac{n_1!}{N}\sum_{i=1}^{k}|a_i|$$
$$\le\min_{1\le i\le k}|a_i|\cdot n_1!\le|a_1|\cdot n_1!,$$

但 $|a_2\cdot n_2!+\cdots+a_k\cdot n_k!|=|-a_1\cdot n_1!|=|a_1|\cdot n_1!$，矛盾.

所以，满足条件的正整数组 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 至多有 N^k 组．本题得证.

···············40 分

二．**（本题满分 40 分）** 如图所示，在 ΔABC 中，M 是边 AC 的中点，D,E 是 ΔABC 的外接圆在点 A 处的切线上的两点，满足 $MD\,//\,AB$，且 A 是线段 DE 的中点，过 A,B,E 三点的圆与边 AC 相交于另一点 P，过 A,D,P 三点的圆与 DM 的延长线相交于点 Q．证明：$\angle BCQ=\angle BAC$.



证明：取 BC 边的中点 N，则 D, M, Q, N 共线，且 $MN // AB$．

由弦切角定理可知 $\angle DAM = \angle CBA = \angle CNM$．又 $\angle AMD = \angle NMC$，故 $\Delta AMD \backsim \Delta NMC$．因此

$$\frac{NM}{NC} = \frac{AM}{AD}. \qquad ①$$

……………10 分

由已知条件，A, D, P, Q 四点共圆，故 $\angle APQ = \angle ADQ = \angle ADM = \angle ACB$，因此 $PQ // BC$．于是

$$\frac{NQ}{NM} = \frac{CP}{CM}. \qquad ②$$

结合①、②以及 $AD = AE$ 可得

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{NQ}{NM} \cdot \frac{NM}{NC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{CP}{AD} = \frac{CP}{AE},$$

即有

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{CP}{AE}. \qquad ③$$

……………20 分

由弦切角定理可知 $\angle BAE = \angle BCA = \angle BCP$．又 A, P, B, E 四点共圆，故 $\angle BEA = \angle BPC$．因此 $\Delta BAE \backsim \Delta BCP$．于是 $\dfrac{CP}{AE} = \dfrac{BC}{BA}$，结合③可得

$$\frac{NQ}{NC} = \frac{BC}{BA}.$$

……………30 分

又 $MN // AB$，故 $\angle CNQ = \angle ABC$．所以 $\Delta CNQ \backsim \Delta ABC$．

从而 $\angle NCQ = \angle BAC$，即 $\angle BCQ = \angle BAC$．……………40 分

三．**（本题满分 50 分）**设整数 $n \geq 4$．证明：若 n 整除 $2^n - 2$，则 $\dfrac{2^n - 2}{n}$ 是合数．

证明：将整数 $\dfrac{2^n - 2}{n}$ 记为 y．

若 n 为奇数，则由 $2^n - 2$ 为偶数知 y 为偶数．又 $n \geq 4$，故 $\dfrac{2^n - 2}{n} > 2$，从而 y 是合数．……………10 分

以下考虑 n 为偶数的情形，设 $n = 2m\ (m > 1)$．

因 $y = \dfrac{2^{2m} - 2}{2m} = \dfrac{2^{2m-1} - 1}{m}$ 为整数，故 m 为奇数．

设 δ 是 2 模 m 的阶，则 $\delta < m$，且 $\delta \mid 2m - 1$（因为 $m \mid 2^{2m-1} - 1$）．

设 $2m - 1 = \delta r$，由 $\delta < m < 2m - 1$ 知 $r > 1$．

(1) 若 $m \neq 2^\delta - 1$，因 $m \mid 2^\delta - 1$，故 $m < 2^\delta - 1$．此时

$$y = \frac{2^{2m-1} - 1}{m} = \frac{2^{\delta r} - 1}{m} = \frac{2^{\delta r} - 1}{2^\delta - 1} \cdot \frac{2^\delta - 1}{m},$$

因 $r > 1$，故这是两个大于1的整数之积，为合数．……………20 分

(2) 若 $m=2^{\delta}-1$，则 $2(2^{\delta}-1)-1=2m-1=\delta r$．由 $m>1$ 知 $\delta>1$，故

$$r=\frac{2^{\delta+1}-3}{\delta}>\delta\,. \qquad ①$$

因 $2^{\delta}-1\mid 2^{\delta r}-1,\ 2^{r}-1\mid 2^{\delta r}-1$，故 $2^{\delta r}-1$ 是 $[2^{\delta}-1,2^{r}-1]$ 的倍数，即

$$\left.\frac{(2^{\delta}-1)(2^{r}-1)}{(2^{\delta}-1,2^{r}-1)}\right|2^{\delta r}-1\,,$$

注意到 $(2^{\delta}-1,2^{r}-1)=2^{(\delta,r)}-1$，故 $(2^{\delta}-1)(2^{r}-1)\,\big|\,(2^{\delta r}-1)(2^{(\delta,r)}-1)$．因此

$$y=\frac{2^{2m-1}-1}{m}=\frac{2^{\delta r}-1}{2^{\delta}-1}=\frac{(2^{\delta r}-1)(2^{(\delta,r)}-1)}{(2^{\delta}-1)(2^{r}-1)}\cdot\frac{2^{r}-1}{2^{(\delta,r)}-1}\,, \qquad ②$$

为两个整数之积．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………40 分

因 $r>\delta$（见①），故 $\dfrac{2^{r}-1}{2^{(\delta,r)}-1}\geq\dfrac{2^{r}-1}{2^{\delta}-1}>1$．又 $\delta\geq 2$，故

$$\frac{(2^{\delta r}-1)(2^{(\delta,r)}-1)}{(2^{\delta}-1)(2^{r}-1)}\geq\frac{(2^{2r}-1)\cdot 1}{(2^{\delta}-1)(2^{r}-1)}>\frac{2^{2r}-1}{(2^{r}-1)(2^{r}-1)}=\frac{2^{r}+1}{2^{r}-1}>1\,.$$

因此②表明 y 是两个大于1的整数之积，为合数．

综上，结论得证．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………50 分

四．（本题满分 50 分） 求具有下述性质的最小正数 c：对任意整数 $n\geq 4$，以及集合 $A\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$，若 $|A|>cn$，则存在函数 $f:A\to\{1,-1\}$，满足

$$\left|\sum_{a\in A}f(a)\cdot a\right|\leq 1\,.$$

解：所求最小的 $c=\dfrac{2}{3}$．

首先，当 $n=6,\ A=\{1,4,5,6\}$ 时，不存在满足要求的 f（因为 A 的元素和为16，且 A 不能划分为两个元素和均为8的子集的并）．此时 $|A|=\dfrac{2}{3}n$，故 $c<\dfrac{2}{3}$ 不具有题述性质．　　　　　　　　　　　　　　　　　　……………10 分

下面证明 $c=\dfrac{2}{3}$ 符合要求，即当 $|A|>\dfrac{2}{3}n$ 时，存在满足要求的 f．

引理：设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 是正整数，总和为 s，且 $s<2m$，则对任意整数 $x\in[0,s]$，存在指标集 $I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，满足 $\sum\limits_{i\in I}x_i=x$（对空指标集求和认为是零）．

引理的证明：对 m 归纳证明．$m=1$ 时，只能 $x_1=s=1$，结论显然成立．假设 $m>1$，且结论在 $m-1$ 时成立．不妨设 $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_m$，则

$$x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}\leq\frac{m-1}{m}\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_m)<\frac{m-1}{m}\cdot 2m=2(m-1)\,. \qquad ①$$

又由于 $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}\geq m-1$，因此

$$x_m\leq m\leq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}\,. \qquad ②$$

对任意整数 $x\in[0,s]$，若 $x\leq x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$，由①及归纳假设知存在指标集 $I\subseteq\{1,\cdots,m-1\}$，使得 $\sum\limits_{i\in I}x_i=x$．若 $x\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{m-1}$，则对 $x-x_m$ 用归

纳假设（由②知 $x-x_m\ge 0$），存在指标集 $I\subseteq\{1,\cdots,m-1\}$，使得 $\sum\limits_{i\in I}x_i=x-x_m$．此时指标集 $I'=I\cup\{m\}\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$ 满足 $\sum\limits_{i\in I'}x_i=x$．引理获证． ……………20 分

回到原问题．注意到 $n\ge 4$，分两种情形讨论．

(1) $|A|$ 为偶数，设 $|A|=2m$．将 A 中元素从小到大依次记为

$$a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_m<b_m.$$

令 $x_i=b_i-a_i>0,1\le i\le m$，则

$$s=\sum_{i=1}^{m}x_i=(b_m-a_1)-\sum_{i=1}^{m-1}(a_{i+1}-b_i)\le n-1-(m-1)=n-m<2m$$

（这里利用了 $2m=|A|>\frac{2}{3}n$）．从而 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 满足引理的条件．

取 $x=\left[\frac{s}{2}\right]\in[0,s]$，利用引理可知存在 $I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $\sum\limits_{i\in I}x_i=\left[\frac{s}{2}\right]$，令

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & i\in I,\\ -1, & i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus I,\end{cases}$$

则

$$\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i(b_i-a_i)=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i=\left[\frac{s}{2}\right]-\left(s-\left[\frac{s}{2}\right]\right)=2\left[\frac{s}{2}\right]-s\in\{0,-1\},$$

从而结论成立（只需令 $f(a_i)=-\varepsilon_i,f(b_i)=\varepsilon_i$ 即可）． ……………30 分

(2) $|A|$ 为奇数，设 $|A|=2m+1$，则 $m\ge 1$．将 A 中元素从小到大依次记为

$$a<a_1<b_1<\cdots<a_m<b_m.$$

令 $x_i=b_i-a_i>0,1\le i\le m$，同情形(1)可知 $s=x_1+x_2+\cdots+x_m<2m$，又显然有 $s\ge m$．由于 $2m+1=|A|>\frac{2}{3}n$，故 $n\le 3m+1$．从而

$$a\le n-2m\le m+1\le s+1.$$ ……………40 分

因 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 满足引理的条件，对 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 及 $x=\left[\frac{a+s}{2}\right]\in[0,s]$ 用引理，可知存在 $I\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $\sum\limits_{i\in I}x_i=x=\left[\frac{a+s}{2}\right]$．令

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1, & i\in I,\\ -1, & i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus I,\end{cases}$$

则

$$\left|-a+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i x_i\right|=\left|-a+\sum_{i\in I}x_i-\sum_{i\notin I}x_i\right|=|-a+x-(s-x)|$$

$$=\left|2\left[\frac{a+s}{2}\right]-(a+s)\right|\le 1,$$

从而结论成立（只需对 $i\in I$，令 $f(a_i)=-1,f(b_i)=1$，对 $i\in\{1,2,\cdots,n\}\setminus I$，令 $f(a_i)=1,f(b_i)=-1$，并令 $f(a)=-1$ 即可）． ……………50 分