常州市联盟学校 2023—2024 学年度第一学期学情调研

高三年级数学试卷

出卷老师　　　　审卷老师　　　　考试时间 120 分钟

本试卷共 22 大题　　　满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,1,2\}$，$B=\{x\mid 3^x<1\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-2,-1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{-2,-1,1\}$　　D．$\{-2,-1,2\}$

2. “$x<0$”是“$\ln(x+1)<0$”的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3. 设 m，n，l 是三条不同的直线，α，β，γ 是三个不同的平面，有下列命题中，真命题为（　　）

A. 若 $m\perp n$，$l\perp n$，则 $m\perp l$　　B. 若 $\alpha\perp\beta$，$\beta\perp\gamma$，则 $\alpha\perp\gamma$

C. 若 $m\perp\alpha$，$m//n$，则 $n\perp\alpha$　　D. 若 $m//n$，$m//\alpha$，则 $n//\alpha$

4. 已知圆台的上下底面半径分别为 1 和 2，侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$，则该圆台的体积为（　）

A．$\dfrac{8\pi}{3}$　　B．$\dfrac{14\pi}{3}$　　C．5π　　D．$\dfrac{16\pi}{3}$

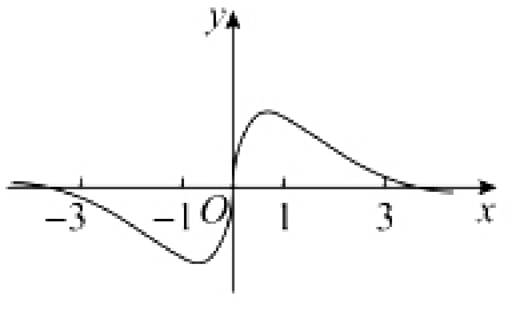
5. “幸福感指数”是指某个人主观地评价他对自己目前生活状态满意程度的指标，常用区间 $[0,10]$ 内的一个数来表示，该数越接近 10 表示幸福感指数越高．已知甲、乙、丙、丁 4 人的幸福感指数分别为：

$4\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{(-8)^2}$；　$((\lg 2)^2+\lg 2\cdot\lg 50+\lg 25)+\log_5 8\times\log_2 25$；　$\log_2 150$；　$(\sqrt{5})^{\ln 6}$

则这 4 人的幸福感指数最高的是（　　）

A．甲　　B．乙　　C．丙　　D．丁

6. 如图，该图象是下列四个函数中的某个函数的大致图象，则该函数是（　　）



第 6 题

A．$y=\dfrac{-x^3+3x}{x^2+1}$　　B．$y=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$　　C．$y=\dfrac{2x\cos x}{x^2+1}$　　D．$y=\dfrac{2\sin x}{x^2+1}$

7. 已知直线 $2ax-2y-a=0$ 与曲线 $y=\ln(2x-1)$ 相切，则实数 a 为（　　）

A．$\dfrac{2}{e}$　　B．$\dfrac{\sqrt{e}}{2e}$　　C．$2e$　　D．$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+4,x<2\\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{x},x\ge 2\end{cases}$，设 $a\in R$，若关于 x 的不等式 $f(x)\ge |x-a|$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是（　　）

A. $\left[-\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right]$　　B. $\left[-\frac{7}{4},\frac{15}{4}\right]$　　C. $\left[-\frac{7}{4},\frac{11}{2}\right]$　　D. $\left[-\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right]$

二、多选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

9. 下列命题正确的是（　　）

A. 若随机变量 X 的方差为 $\frac{12}{25}$，则 $D(5X+2)=14$

B. 对于随机事件 A 与 B，若 $P(\bar{B})=0.3$，$P(B|A)=0.7$，则事件 A 与 B 独立

C. 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,1)$，若 $P(\xi>1)=p$，则 $P(-1<\xi<0)=\frac{1}{2}-p$

D. 根据分类变量 X 与 Y 的成对样本数据，计算得到 $\chi^2=3.712$，根据 $\alpha=0.05$ 的独立性检验 $(P(\chi^2\ge 3.841)=0.05)$，有95%的把握认为 X 与 Y 有关

10. 下列命题中正确的是（　　）

A. 若幂函数 $f(x)$ 的图像过点 $A\left(3,\frac{1}{27}\right)$，则 $f(x)=x^{-3}$

B. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x,x<a\\ x^2,x\ge a\end{cases}$ 在 R 上单调递增，则 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$

C. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{3}{y}=1$，则 $x+2y$ 的最小值为 $7+2\sqrt{6}$

D. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)+f(x)=1$，$g(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点坐标依次为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_8,y_8)$，则 $\sum_{i=1}^{8}(x_i+y_i)=8$

11. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+3x+1}{e^x}$，其中 $x\in R$，则（　　）

A. 不等式 $f(x)\ge -e^2$ 对 $\forall x\in R$ 恒成立

B. 若关于 x 的方程 $f(x)=k$ 有且只有两个实根，则 k 的取值范围 $\left(-e^2,0\right]$

C. 方程 $f(f(x))=0$ 恰有 3 个实根

D. 若关于 x 的不等式 $f(x)\ge ax$ 恰有 1 个正整数解，则 a 的取值范围为 $\left(\frac{11}{e^2},\frac{5}{e}\right]$

12. 已知函数 $y=f(x)$ 满足：对于任意实数 x，$y\in R$，都有 $2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$，且 $f(1)=-1$，则（　　）

A. $f(x)$是奇函数　　　　B. $f(x)$是偶函数

C. $\left(\frac{1}{2},0\right)$是曲线$y=f(x)$的一个对称中心　　　　D. $f(2022)=1$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 牛顿曾经提出了常温环境下的温度冷却模型：$\theta=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}+\theta_0$，其中$t$为时间（单位：min),$\theta_0$为环境温度，$\theta_1$为物体初始温度，$\theta$为冷却后温度.假设在室内温度为$20°C$的情况下，一杯饮料由$100^{\circ}C$降低到$60^{\circ}C$需要20min，则此饮料从$60^{\circ}C$降低到$25^{\circ}C$需要__________min.

14. 已知函数$f(x)=1+\log_3 x$，$x\in[1,9]$，则函数$y=[f(x)]^2+f(x^2)$的值域为__________.

15. 甲箱中有两个白球三个红球，乙箱中有一个白球三个红球，先从甲箱中取一球放入乙箱，再从乙箱中任取一球，则从乙箱中取得的为白球的概率为__________.

16. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PA\perp$底面$ABCD$.若四棱锥$P-ABCD$的体积为9，且其顶点均在球O上，则当球0的体积取得最小值时，$AP=$__________，此时球心0到平面***PBD***的距离是__________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知$a\in R$，全集$U=R$，集合$A=\left\{x\,|\,\frac{1}{9}<3^{x-a}\le 27\right\}$，函数$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(3x-2)}$的定义域为***B***.

(1) 当$a=2$时，求$(C_U B)\cap A$；

(2) 若$x\in B$是$x\in A$成立的充分不必要条件，求a的取值范围.

18. 设函数$f(x)=\log_2(4^x+1)-kx$，$x\in R$，为偶函数。

(1) 求$\boldsymbol{k}$的值；

(2) 写出函数$y=f(x)$的单调性（不需证明），并解不等式 $f(2x-1)>f(x+1)$.

19. 已知函数$f(x)=ax^2-\ln x+(1-2a)x$，其中$a\in R$.

(1) 若$x=\frac{1}{2}$是函数$f(x)$的极值点，求a的值；

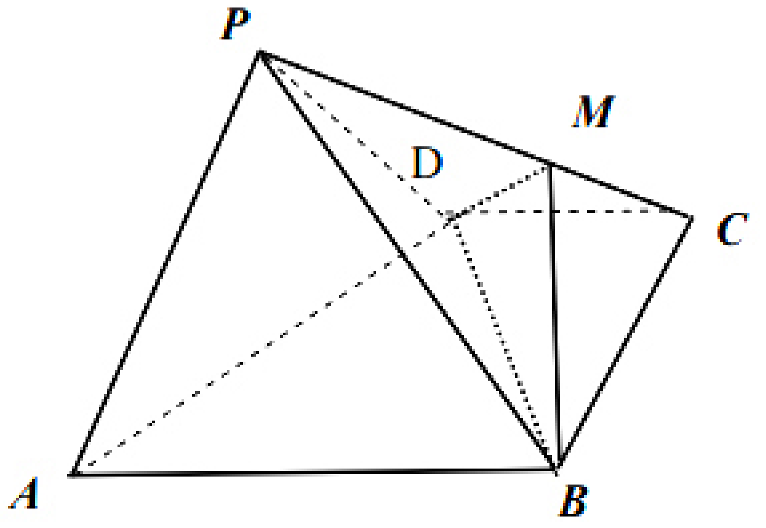
(2) 若$a\in R$讨论函数$f(x)$的单调性.

20. 四棱锥 ***P-ABCD*** 中，底面 ***ABCD*** 为直角梯形，$AB//CD$，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=1$，平面 $PAD\perp$ 底面 ***ABCD***，$\triangle PAD$ 为等腰直角三角形，$PA=PD$，M 为 PC 上一点，$PM=2MC$，$PA//$平面 ***MBD***.

(1) 求 ***CD*** 的长度；

(2) 求证：$PA\perp$ 平面 ***PBD***；

(3) 求 ***PA*** 与平面 ***PBC*** 所成角的正弦值.



第 20 题

21. 甲、乙两名学生进行“趣味投篮比赛”，制定比赛规则如下：每轮比赛中甲、乙两人各投一球，两人都投中或者都未投中则均记 0 分；一人投中而另一人未投中，则投中的记 1 分，未投中的记 −1 分，设每轮比赛中甲投中的概率为 $\dfrac{2}{3}$，乙投中的概率为 $\dfrac{1}{2}$，甲、乙两人投篮相互独立，且每轮比赛互不影响.

(1) 经过 1 轮比赛，记甲的得分为 X，求 X 的分布列和期望；

(2) 经过 3 轮比赛，用 $P_n(n=1,2,3)$ 表示第 n 轮比赛后甲累计得分低于乙累计得分的概率，研究发现点 $(n,P_n),(n=1,2,3)$ 均在函数 $f(x)=m(s-t^x)$ 的图象上，求实数 m，s，t 的值.

22. 已知函数 $f(x)=e^x+(a-1)x+\cos x-2$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(3) 当 $a<0$ 时，判断 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 零点的个数，并说明理由.