宜城一中 枣阳一中
襄州一中 曾都一中

2019—2020 学年上学期高三期中考试数学（理）参考答案

一、选择题（每题 5 分，共 60 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	`10	11	12
A	D	B	C	A	D	C	D	B	A	C	B

二、填空题（每题 5 分，共 20 分）

13. 2　　14. 2　　15. $\left(-\infty，-\dfrac{1}{2}\right)$　　16. 1

三、解答题（共 70 分）

17. 解：$\because$ $p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题

$\therefore p,q$ 一真一假 ……………………………………1 分

p：$f\left(x\right)=\ln\left(x^2+ax+4\right)$ 定义域为 R

则 $x^2+ax+4>0$ 恒成立, 即 $\Delta=a^2-16<0$　　$\therefore -4<a<4$ ……………………………………3 分

$q: f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{x-1}=1+\dfrac{a+1}{x-1}$　　$\because$ $f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减　$\therefore a+1>0$

$\therefore a>-1$　故 $q: a>-1.$ ……………………………………5 分

若 p 真 q 假，则 $\begin{cases}-4<a<4\\ a\le -1\end{cases}\Rightarrow -4<a\le -1$ ……………………………………7 分

若 p 假 q 真，则 $\begin{cases}a\le -4或a\ge 4\\ a>-1\end{cases}\Rightarrow a\ge 4$ ……………………………………9 分

综上所述，$-4<a\le -1或a\ge 4$ ……………………………………10 分

18. 解：$f\left(x\right)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)}{2}-\dfrac{1}{2}$ ……………………………………2 分

$=\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ……………………………………4 分

（1）$\because$ $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{5\pi}{12}\right]$ 上是减函数，在 $\left[-\dfrac{5\pi}{12},0\right]$ 上是增函数……………………5 分

$f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{3}{4},f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},f\left(0\right)=\dfrac{3}{4}$ ……………………………………6 分

$\therefore f(x)_{\min}=f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}, f(x)_{\max}=f(0)=\frac{3}{4}$ ……………………………8 分

(2) $\because f\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{7\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{10}$ $\therefore \sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$ ……………………………9 分

$\therefore \sin 2\alpha=\cos\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right]=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{23}{25}$ ……………………………12 分

19. 解：(1) 因为$\{a_n\}$是递增的等差数列，所以$a_4<a_6$，即$d>0$

又因为a_4，a_6是方程$x^2-7x+12=0$的根，

所以$a_4=3$，$a_6=4$， ……………………………3 分

即$d=\frac{1}{2}$，$a_1=\frac{3}{2}$， ……………………………5 分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{n+2}{2}$ ……………………………6 分

(2) 由 (1) 得

$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{4}{(n+2)(n+3)}=4(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$ ……………………………8 分

所以$S_n=4(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})$ ……………………………10 分

$\therefore S_n=4(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3})=\frac{4n}{3(n+3)}$ ……………………………12 分

20. 解：(1) $0<x<60$, 有 $y=100x-(x^2+20x)-500=-x^2+80x-500\ (0<x<60, x\in N)$; …2 分

$x\geq 60$, 有 $y=100x-(102x+\frac{9800}{x}-2080)-500=1580-2(x+\frac{4900}{x})(x\geq 60, x\in N)$; ……4 分

$$\therefore y=\begin{cases}-x^2+80x-500, & (0<x<60, x\in N)\\ 1580-2(x+\frac{4900}{x}), & (x\geq 60, x\in N)\end{cases}$$ ……………………………6 分

(2) 由 (1) 可得：$0<x<60$, 有 $y=-(x-40)^2+1100$ $\therefore x=40$时；

y取得最大值为1100（万元） ……………………………8 分

$x\geq 60$, 有 $y=1580-4(x+\frac{4900}{x})\leq 1580-4\sqrt{x\bullet\frac{4900}{x}}=1300$;（当且仅当$x=70$时取等号）

即当$x=70$时y取得最大值为1300（万元） ……………………………10 分

综上可得：年产量为 70 台时，该企业的设备的生产中所获得利润最大为1300（万元）. ……………………………12 分

21. 解：(1) 已知$\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$，由正弦定理，得$\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A$，

因为$\sin C\neq 0$，所以$\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$A=\frac{\pi}{6}$. ……………………………3 分

由$a^2+c^2=b^2+\sqrt{3}ac$，得$\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由余弦定理，得$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore B=\dfrac{\pi}{6}$……5 分

（2）设$\angle MCA=\alpha\left(0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{3}\right)$，在$\Delta AMC$中由正弦定理，得$\dfrac{CM}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin\angle AMC}$

所以$CM=\dfrac{2}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}$ ，同理$CN=\dfrac{2}{\cos\alpha}$ ……………………………………9 分

故$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot CM\cdot CN\cdot\sin\angle MCN$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}}\ge\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，此时$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ ………………12 分

22. 解：（1）当$a=1$时，函数的解析式为$f(x)=e^x-x$，则：$f'(x)=e^x-1\ge0$， ……1 分

$\therefore x\ge0$即函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，在区间$(-\infty,0)$上单调递减，……………3 分

$\therefore$函数的最小值为：$f(0)=e^0-0=1$． ………………………………………………………4 分

（2）若$x\ge0$时，$f(x)+ln(x+1)\ge1$，即$e^x\text{-}ax+ln(x+1)-1\ge0$（*）

令$g(x)=e^x-ax+ln(x+1)-1$，则$g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}-a$ ………………………………5 分

令$\phi(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}-a$，则$\phi'(x)=e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2e^x-1}{(x+1)^2}\ge0$

∴函数$\phi(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，$\phi(x)\ge\phi(0)=2-a$ ……………………………7 分

①若$a\le2$， 则$\phi(x)\ge0$，即$g'(x)\ge0$

∴函数$g(x)$在区间$[0,+\infty)$上单调递增，∴$g(x)\ge g(0)=0$.

∴（*）式成立. ………………………………………………………………………………9 分

②若$a>2$，则$\phi(0)=2-a<0$，

$\phi(a)=e^a+\dfrac{1}{1+a}-a=e^a-a+\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{a+1}>0$.

故$\exists x_0\in(0,a)$，使得$\phi(x_0)=0$，

则当$0<x<x_0$时，$\phi(x)<\phi(x_0)=0$，即$g'(x)<0$.

∴函数$g(x)$在区间$(0,x_0)$上单调递减，

$\therefore g\left(x_0\right) < g\left(0\right) = 0$，即（*）式不恒成立. ……………………………………………………11 分

综上所述:实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, 2\right]$. ……………………………………………………12 分