江西省九所重点中学八届二次联考（文科数学）答案

一、选择题:（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	A	C	D	A	D	B	C	A	C

二、填空题:（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在题中的横线上）

13．$4\sqrt{2}$　　　　14．$\dfrac{17}{23}$

15．$2\sqrt{2}x-y-6=0$ 或 $2\sqrt{2}x+y+6=0$（写出其中之一即可）　　16. $25-12\sqrt{2}$

三、解答题（解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.解:（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

由$S_4=S_5=-20$,

得方程组$\begin{cases}4a_1+6d=-20\\5a_1+10d=-20\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=-8,\\d=2.\end{cases}$

所以$a_n=-8+2(n-1)=2n-10$,

$S_n=\dfrac{n(-8+2n-10)}{2}=n^2-9n.$ ……………………………6 分

（2）　由（1）知$a_n=2n-10$，所以$a_{k_n}=2k_n-10$.

因为$k_1=8$,所以数列$3,a_{k_1},a_{k_2},\cdots,a_{k_n},\cdots$的公比$q=\dfrac{a_8}{3}=\dfrac{16-10}{3}=2,$

所以$a_{k_n}=2k_n-10=3\times2^n$,所以$k_n=3\times2^{n-1}+5.$ …………………………12 分

18.（1）由题意得:

	选择全理	不选择全理	合计
男生	35	15	50
女生	15	25	40
合计	50	40	90

$k^2=\dfrac{90(35\times25-15\times15)^2}{50\times40\times50\times40}\approx9.506>7.879$，

∴有 99.5%的把握认为选择全理与性别有关. …………………………6 分

（2）设“至少抽到一名女生”为事件 A，设 4 名男生分别为 1，2，3，4，两名女生分别为 5，6．从 6 名学生中抽取 2 名所有的可能为:

（1，2），（1，3），（1，4），（1，5），（1，6），（2，3），（2，4），（2，5），（2，6），（3，4），（3，5），（3，6），（4，5），（4，6）（5，6），共 15 种.

不包含女生的基本事件有（1，2），（1，3），（1，4），（2，3），（2，4），（3，4）共 6 种.故所求概率$P(A)=1-\dfrac{6}{15}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$. …………………………12 分

19.（1）证明: ∵C在半圆O上，AB为直径，∴$BC\perp AC$.

$\because CD\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，$\therefore CD\perp BC$.
又$AC\cap CD=C$，$\therefore BC\perp$平面ACD.
$CD//BE$，B,C,D,E 共面.
又 BC//平面ADE,平面 BCDE∩平面 ADE= DE
∴BC//DE, 即 DE⊥ 平面 ACD 又 DE 在平面 ADE 内
∴平面$ADE\perp$平面ACD ……………………6 分
（2）解：$\because CD//BE$，$\therefore \angle ADC$为AD与BE所成的角，即$\angle ADC=45°$，
$\therefore CD=AC=1$，$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=2$.
由（1）可知，CA，CB,CD 两两垂直，构造一个长方体 BCDE − HAFG,长，宽，高分别为 2,1,1
长方体的外接球 M,半径为 R，长方体的体对角线为球的直径，则$4R^2=1^2+1^2+2^2=6$
又因为 A,B,C,E 四点都在球 M，所以三棱锥$A-BCE$的外接球即球 M
$S_{表}=4\pi R^2=6\pi$……………………12 分

20.（1）设椭圆C的焦距为$2c$，因为ΔMF_1F_2的周长为 6，面积为$\frac{3}{2}$，

所以$\begin{cases}2a+2c=6 ① \\ \frac{b^2c}{a}=\frac{3}{2} ②\end{cases}$，由①得：$a=3-c$，将此式代入②得：$2\left[(3-c)^2-c^2\right]c=3(3-c)$，

所以$4c^2-7c+3=(c-1)(4c-3)=0$，所以$c=1$或$\frac{3}{4}$

当$c=\frac{3}{4}$时，$a=\frac{9}{4}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}>2$，所以不满足题意；

当$c=1$时，$a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}<2$，所以满足题意.

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……………………5 分

（2）由题可得直线斜率存在，由（1）知$F_2(1,0)$,设直线l的方程为$y=k(x-1)$，

则联立$\begin{cases}y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$,消去$y$，整理得：$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

又$F_2(1,0),P(0,-k)$，则$\overrightarrow{PA}=(x_1,y_1+k),\overrightarrow{AF_2}=(1-x_1,-y_1)$，由$\overrightarrow{PA}=\lambda_1\overrightarrow{AF_2}$可得$x_1=\lambda_1(1-x_1)$，所以$\lambda_1=\frac{x_1}{1-x_1}$.同理可得$\lambda_2=\frac{x_2}{1-x_2}$，.

所以$\lambda_1+\lambda_2=\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}=\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}=\frac{\frac{8k^2}{3+4k^2}-2\times\frac{4k^2-12}{3+4k^2}}{1-\frac{8k^2}{3+4k^2}+\frac{4k^2-12}{3+4k^2}}=-\frac{8}{3}$

所以，$\lambda_1+\lambda_2$为定值$-\frac{8}{3}$. ……………………12 分

21．解：（1）$a=1$时，$f(x)=2x-x\cos x-\sin x$，$x\epsilon[0,\pi]$
$f'(x)=2-\cos x+x\sin x-\cos x=(2-2\cos x)+x\sin x\geq 0$
$\therefore f(x)$在$[0,\pi]$上单调递增

$\therefore f(x)_{\min}=f(0)=0$，$f(x)_{max}=f(\pi)=3\pi$

即 $f(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\max}=3\pi$ ……………………4 分

（2）$f(x)=ax(2-\cos x)-\sin x$，$f(0)=0$

当 $a\ge 1$ 时，$f(x)\ge x(2-\cos x)-\sin x$

由（1）知 $x\in(0,\pi]$ 时，$x(2-\cos x)-\sin x>0$，$\therefore f(x)>0$

当 $x\in(\pi,+\infty)$ 时，$x(2-\cos x)-\sin x=x(1-\cos x)+x-\sin x>0$，$\therefore f(x)>0$

即 $a\ge 1$ 时，$f(x)>0$ ……………………7 分

当 $a\le 0$ 时，$f(x)=ax(2-\cos x)-\sin x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，不合题意．…………8 分

当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=2a-a(\cos x-x\sin x)-\cos x=2a-a\cos x+ax\sin x-\cos x$ ，

$f'(0)=a-1$ $\quad f''(x)=(2a+1)\sin x+ax\cos x$

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f''(x)>0$，$\therefore f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a>0$，$f'(0)=a-1<0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使 $f'(x_0)=0$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，此时 $f(x)<f(0)=0$，不合题意

综上 $a\ge 1$ ． ……………………12 分

22. 解析：（1）因为圆 E 以 $(3,0)$ 为圆心且与圆 O 外切，所以其半径为 $|OE|-1=2$．

所以圆 E 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=4$．

圆 E 的参数方程为 $\begin{cases}x=3+2\cos\varphi,\\ y=2\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$ 为参数）．

由 $(x-3)^2+y^2=4$，得 $x^2+y^2-6x+5=0$．

由 $\begin{cases}x^2+y^2=\rho^2,\\ x=\rho\cos\theta,\end{cases}$

得圆 E 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$． ……………………5 分

（2）由题意得 $|OA|=1$，所以 $|OB|+|OC|=5$．

把 $\theta=\alpha$ 代入 $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$，得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+5=0$，

则 $|OB|,|OC|$ 是 $\rho^2-6\rho\cos\alpha+5=0$ 的两个根，

所以 $|OB|+|OC|=6\cos\alpha=5$，解得 $\cos\alpha=\frac{5}{6}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{11}}{6}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{11}}{5}$，所以直线 BC 的斜率为 $\frac{\sqrt{11}}{5}$． ……………………10 分

23.（1）证明：因为 a,b,c 为正数，所以 $\frac{a}{2}+1=\frac{a}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}$

（当且仅当 $a=1$ 时，取等号）。

同理可得 $\frac{b}{2}+1\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{b}$ （当且仅当 $b=1$ 时取等号），

$\frac{c}{2}+1\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{c}$ （当且仅当 $c=1$ 时取等号）。 因为正数 a,b,c 满足 $abc=1$，

所以 $\left(\frac{a}{2}+1\right)\left(\frac{b}{2}+1\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)\geq\frac{27}{8}\sqrt[3]{abc}=\frac{27}{8}$ （当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号）

……………………5 分

（2）因为正数 a,b,c 满足 $abc=1$.

所以 $ab+bc+ca\geq3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3, a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}=3$.

因为正数 m,n 满足 $m+n=1$，

所以 $(am+n)(bm+n)(cm+n)$

$=abcm^3+(ab+bc+ac)m^2n+(a+b+c)mn^2+n^3$

$\geq m^3+3m^2n+3mn^2+n^3=(m+n)^3=1$

（当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号）。 ……………………10 分