惠州市 2024 届高三第一次调研考试

数学试题参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题满分 5 分，共 40 分

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	C	D	B	D	A

1. 【解析】由已知可得 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，$U=\{1,2,3,4,5,6\}$，所以 $C_U(A\cup B)=\{4,6\}$，故选：B.

2.【解析】由题意知 $z=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$. 虚部为 1，故选：C.

3.【解析】因为 $(x+2)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，令 $x=-1$，得 $a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=1$，故选：A

4.【解析】由 $|a|>1$ 得 $a>1$ 或 $a<-1$，由 $a^2>1$ 得 $a>1$ 或 $a<-1$，故选：C

5.【解析】由弧长公式 $l=|\alpha|\cdot r$ 得：$l_1=\dfrac{2\pi}{3}\cdot r$，$l_2=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 2r$，$l_3=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 3r$，…，$l_{11}=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 11r$，其中 $r=|AB|=1$，

$\therefore$ 蚊香的长度 $L=l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{11}=\dfrac{2\pi}{3}(1+2+3+\cdots+11)=44\pi$ 故选：D.

6.【解析】由题知，$P(A)=\dfrac{A_5^2}{C_5^1C_5^1}=\dfrac{4}{5}$，$P(AB)=\dfrac{C_2^1A_4^1}{C_5^1C_5^1}=\dfrac{8}{25}$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{8}{25}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{2}{5}$，故选：B.

7.【解析】设 $a=1,c=\sqrt{3},b=\sqrt{2}$，则 $|PF_2|=b=\sqrt{2},|OP|=a=1$，$\cos\angle POF_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\cos\angle POF_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由余弦定理可得，$|PF_1|^2=|OF_1|^2+|OP|^2-2|OF_1|\cdot|OP|\cdot\cos\angle F_1OP=3+1-2\times\sqrt{3}\times 1\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=6$，

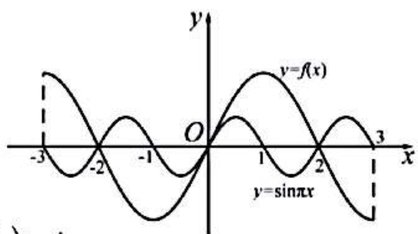
所以 $|PF_1|=\sqrt{6}$，所以 $\dfrac{|PF_1|}{|OP|}=\sqrt{6}$. 故选：D

8.【解析】由题意可得 $f(2+x)=-f(x)$，$f(4+x)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，且图象关于 $x=1$ 对称.令 $g(x)=f(x)-\pi x,g'(x)=f'(x)-\pi$，$\because x\in[0,1]$ 时，$f'(x)>\pi$，$\therefore x\in[0,1]$ 时，

$g'(x)>0$ $\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增 $\therefore$ 当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)\ge g(0)$，

而 $g(0)=f(0)-\pi\times 0=0$，$\therefore g(x)\ge 0$ 即 $f(x)-\pi x\ge 0$ 另设

$h(x)=\sin\pi x-\pi x,x\in[0,1]$，$h'(x)=\pi\cos\pi x-\pi=\pi(\cos\pi x-1)\le 0$，



即函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，则 $\sin\pi x-\pi x\le 0$，即 $\sin\pi x\le\pi x$，故 $f(x)\ge\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 上恒成立。结合对称性可画出函数 $f(x)$ 和 $y=\sin\pi x$ 在 $[-3,3]$ 上的简图，由图象可知，不等式 $f(x)\le\sin\pi x$ 在 $[-3,3]$ 上的解集为 $[-2,0]\cup[2,3]$.故选：A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题满分 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
全部正确答案	AC	AD	BC	BD

9.【解析】$a=\log_2 e>\log_2 2=1$，即 $a>1$.$b=\ln 2<\ln e=1$，即 $b<1$.$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\log_2 3>\log_2 e=a$，

所以 $c>a>b$，由基本不等式知 D 错误，故选：AC

10.【解析】对于 A，由残差定义，如果样本数据点分布的带状区域越狭窄，说明该模型的拟合精度越高，故 A 正确；

对于 B，在频率分布直方图中，各小长方形的面积等于相应各组的频率，故 B 错误；

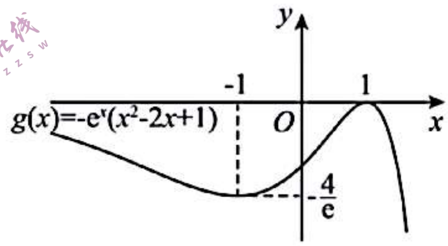
对于 C，因为 $8\times 0.75=6$，故第 75 百分位数为第 6 个数和第 7 个数的平均数 10，故 C 错误；

对于 D，设该校女生人数为 n，由已知可得 $\frac{55}{100}=\frac{1500-n}{1500}$，解得 $n=675$，故 D 正确.故选:AD.

11.【解析】设切点为 $\left(x_0,(x_0-1)e^{x_0}\right)$，因为 $f'(x)=xe^x$，$f'(x_0)=x_0e^{x_0}$，所以切线方程为

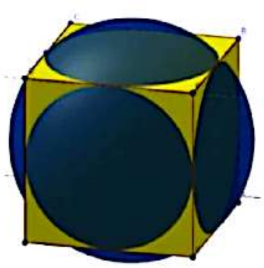
$y-(x_0-1)e^{x_0}=x_0e^{x_0}(x-x_0)$，又切线过 $P(1,\lambda)$，则 $\lambda-(x_0-1)e^{x_0}=x_0e^{x_0}(1-x_0)$，整理得

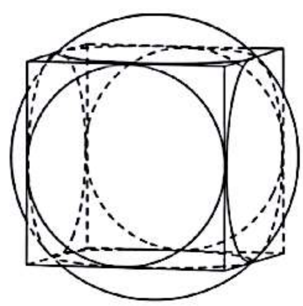
$\lambda=-e^{x_0}\left(x_0^2-2x_0+1\right)$，所以令 $g(x)=-e^x\left(x^2-2x+1\right)$，则 $g'(x)=-e^x\left(x^2-1\right)$，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\pm 1$，所以，当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $-1<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，故当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 取极小值 $g(-1)=-\frac{4}{e}$；当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取极大值 $g(1)=0$，由 $g(x)=-e^x(x-1)^2$，可知，当 $x\neq 1$ 时，$g(x)<0$，所以函数 $g(x)$



的图象大致如图，由图可知，当 $-\frac{4}{e}<\lambda<0$ 时，直线 $y=\lambda$ 与函数 $g(x)$ 的图象有 3 个交点，此时过点 $P(1,\lambda)$ 可作 3 条直线与函数 $f(x)=(x-1)e^x$ 的图象相切，由此可知，BC 符合题意.故选：BC.

12.【解析】对于 A，正方体的棱切球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 错误；





对于选项 B 如图所示，球 O 在正方体外部的体积 $V>V_{球O}-V_{正方体}=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-1=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-1$，或者可

根据球 O 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 上方球缺部分的体积

$V=\frac{1}{3}\pi(3R-h)\cdot h^2=\frac{1}{3}\pi\cdot\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{5}{24}\right)\pi$，$h$ 为球缺的高，

球O在正方体外部的体积为$6V=6\left(\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{5}{24}\right)\pi=\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)\pi$，故B选项正确；

对于选项C，取棱AB中点E，可知E在球面上，可得$\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$，所以

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EB}\right)=\left(\overrightarrow{PE}\right)^2-\left(\overrightarrow{EA}\right)^2=\left|\overrightarrow{PE}\right|^2-\frac{1}{4}$，点$P$在球$O$的正方体外部（含正方体表面）运动，所以$0\le\left|\overrightarrow{PE}\right|\le\sqrt{2}$（当$PE$为直径时，$\left|\overrightarrow{PE}\right|=\sqrt{2}$），所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\in\left[-\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right]$，C选项错误；

D选项正确.故选：BC.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

题号	13	14	15	16
答案	$-\frac{3}{4}$	$f(x)=2x+k$ 【注：其中k可取任意实数】	$[-2,2]$ 【注：可写成不等式】	$\left(0,\frac{2}{5}\right)$ 【注：可写成不等式】

13.【解析】因为$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以$\cos\alpha=\pm\frac{4}{5}$，因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，

所以$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，故答案为：$-\frac{3}{4}$

14.【解析】只要函数$f(x)$图象上移2个单位，或者左移1个单位，得到的函数图象重合，则满足

$f(x+1)=f(x)+2$，所以$f(x)=2x+k$（其中k可取任意实数）均满足要求。本题为开放题，典型答案为：$f(x)=2x$，$f(x)=2x+1$，……

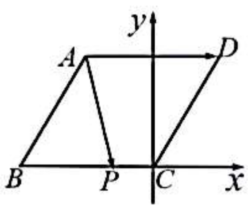
15.【解析1】$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\lambda\in[0,1]$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}\right)=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}^2$

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=2\times2\times\cos120°+4\lambda=4\lambda-2$，因为$\lambda\in[0,1]$，所以$-2\le\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}\le2$.

【解析2】如图示，以C为原点，$\overrightarrow{BC}$为x轴正方向，过C垂直向上方向为y轴建立平面直角坐标系.

因为菱形$ABCD$的边长为2，$\angle ABC=60°$，则$B(-2,0),C(0,0),D(1,\sqrt{3}),A(-1,\sqrt{3})$.

因为点P在BC边上（包括端点），所以$P(t,0)$,其中$t\in[-2,0]$.



所以$\overrightarrow{AD}=(2,0),\overrightarrow{AP}=(t+1,-\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=2t+2$.

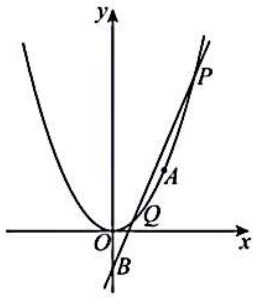
因为$t\in[-2,0]$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=2t+2\in[-2,2]$.故答案为：$[-2,2]$.

【注1】答案用不等式表示时使用了含未定义参数的，得0分。如：$-2\le a\le2$，则认为a为未定义的参数。

【注2】本题可用临界值的投影向量点积可到范围的边界值。

16.【解析】如图，因为点$A(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上，得$p=\frac{1}{2}$，所以抛物线方程为$x^2=y$，设点$P\left(x_1,x_1^2\right)$，$Q\left(x_2,x_2^2\right)$，不妨取$x_1>0,x_2>0$，由点B,P,Q三点共线，得$k_{BP}=k_{BQ}$，得

$\frac{x_1^2+1}{x_1}=\frac{x_2^{\ 2}+1}{x_2}\Rightarrow x_1x_2=1$，故原式



$=\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|BP|\cdot|BQ|}=\frac{\sqrt{x_1^{\ 2}+x_1^{\ 4}}\times\sqrt{x_2^{\ 2}+x_2^{\ 4}}}{x_1x_2+\left(x_1^{\ 2}+1\right)\left(x_2^{\ 2}+1\right)}=\frac{\sqrt{2+x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}}{3+x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}$，令$t=\sqrt{2+x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}\in(2,+\infty)$

故原式$=\frac{t}{t^2+1}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\in\left(0,\frac{2}{5}\right)$，故答案为：$\left(0,\frac{2}{5}\right)$或写成$0<\frac{|OP|\cdot|OQ|}{|BP|\cdot|BQ|}<\frac{2}{5}$.

【注】答案用不等式表示时使用了含未定义参数的，得0分。如：$0<\lambda<\frac{2}{5}$，则认为λ为未定义的参数。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （本小题满分10分，其中第一小问5分，第二小问5分）

【解析】(1) 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\sin B+\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin A\sin B$ ……………1分

$\because\sin B>0$，$\therefore\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$ ……………………………………2分

$\therefore$得$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ……………………………………3分

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore\left(A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ ………4分**【注：无范围的说明，本得分点不得分】**

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即$A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………5分

(2)**【解法1】**由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，……………………………………1分

代入已知得$21=16+c^2-4c$ ……………………………………2分

解得$c=5$或$c=-1$(舍） ……………………………………3分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$ ……………………………………4分

$=\frac{1}{2}\times4\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

所以ΔABC的面积为$5\sqrt{3}$ ……………………………………5分

【解法2】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\frac{\sqrt{21}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{\sin B}$，得$\sin B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，……………………1分

由$a>b$，则$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$所以$\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{\sqrt{21}}{7}$………2分**【注：无范围的说明，本得分**

点不得分】

所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}+\frac{2\sqrt{7}}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$ ……………………………………………………3 分

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ ……………………………………………………………………4 分

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{21}\times4\times\frac{5\sqrt{7}}{14}=5\sqrt{3}$

所以ΔABC的面积为$5\sqrt{3}$ ……………………………………………………………………5 分

18.（本小题满分 12 分，其中第一小问 5 分，第二小问 7 分）

【解析】(1) 依题意有$\begin{cases}d=2a_1\\a_5=a_1+4d=9\end{cases}$ ……………………………………………………1 分

解得$a_1=1,d=2$ ……………………………………………3 分**【注：每个结果正确各 1 分】**

于是$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$ ……………………………4 分**【注：公式正确即可给分】**

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=2n-1$ ……………………………………………5 分

(2) $\because n\in N^*$，$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$

当$n\geq2$时，$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=3-\frac{2n+1}{2^{n-1}}$ ……………………………………………1 分

两式相减得：$a_nb_n=\frac{2n-1}{2^n}$ ……………………………………………………………………2 分

而当$n=1$时，$a_1b_1=\frac{1}{2}$满足上式，因此$n\in N^*$，$a_nb_n=\frac{2n-1}{2^n}$ ……………………………3 分

由（1）知$a_n=2n-1$，于是得$b_n=\frac{1}{2^n}$ ………………………………………………………4 分

$\therefore\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列……5 分**【注：无说明首项及公比，本得分点不得分】**

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$ ……………………6 分**【注：公式正确即可给分】**

得$S_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ………………………………………………………………………7 分

19.（本小题满分 12 分，其中第一小问 6 分，第二小问 6 分）

【解析】(1) 当P为线段CD的中点时，$PE\perp$平面ACD. ……………………………………1 分

证明如下：

【解法1】 分别取 AC、CD 中点 O、P，连接 OB、PE、OP.

在 ΔACD 中，O、P 分别是 AC、CD 的中点，$\therefore OP \underset{=}{/\!/} \frac{1}{2}AD$ ……………………………2 分

又$\because$ $AD /\!/ BE$，$AD = 2BE$，即 $BE \underset{=}{/\!/} \frac{1}{2}AD$，$\therefore OP \underset{=}{/\!/} BE$

$\therefore$ 四边形 $OBEP$ 是平行四边形，$BO /\!/ PE$ ……………………………………………………3 分

又$\because$ $AD \perp$ 平面 ABC，$OB \subset$ 面 ABC，$\therefore AD \perp OB$，则有 $PE \perp AD$ ……………………4 分

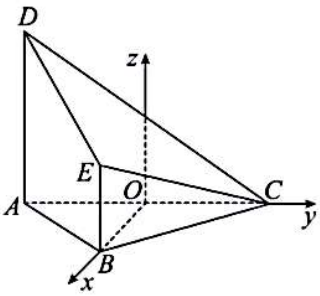
由 $AB = BC$ 知 $OB \perp AC$，则有 $PE \perp AC$

且 $AC \cap AD = A$，$AC \subset$ 面 ACD，$AD \subset$ 面 ACD……5 分 **【注：未列举全三个条件，本得分点不得分】**

$\therefore PE \perp$ 平面 ACD ………………………………………………………………………………6 分

【解法2】 取 AC 中点 O，连接 OB，作 $Oz /\!/ AD$，由已知可知 Oz, OB, AC 两两垂直，

故可建立如下图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ ……………………………2 分



令 $AD = 2BE = 2a$，$OB = c$，$OA = OC = b$，取 CD 中点 P

则 $D(0,-b,2a)$，$C(0,b,0)$，$E(c,0,a)$，$P(0,0,a)$

所以 $\overrightarrow{CD} = (0,-2b,2a)$，$\overrightarrow{CE} = (c,-b,a)$，$\overrightarrow{PE} = (c,0,0)$ ………3 分

若 $\vec{m} = (x,y,z)$ 是面 CDE 的一个法向量，即 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{CD} = -2by + 2az = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CE} = cx - by + az = 0 \end{cases}$

令 $z = b$，则 $\vec{m} = (0,a,b)$ ………………………………………………………4 分

$\because \overrightarrow{PE}\cdot\vec{m} = 0$，…………………………………………………………………………5 分

$\therefore PE \perp$ 平面 ACD. ……………………………………………………………………………6 分

（2）**【解法1】** 在平面 $ABED$ 中分别延长 DE、AB 交于点 F，并连接 CF ……………………1 分

由 $BE \underset{=}{/\!/} \frac{1}{2}AD$，知点 B 是 AF 中点，又 O 是 AC 的中点

$\therefore BO /\!/ FC$，而由（1）知 $OB \perp$ 平面 ACD，$\therefore FC \perp$ 平面 ACD ……………………………2 分

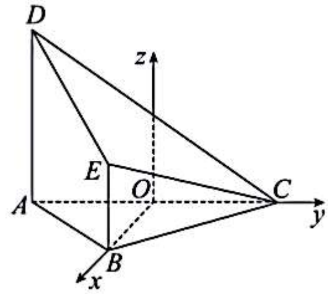
$\therefore \angle ACD$ 就是平面 ECD 与平面 ABC 的夹角 ……………………………………………………3 分

在 $Rt\Delta ACD$ 中，$AC = 2$，$AD = 2$ $\therefore DC = 2\sqrt{2}$ ……………………………………………4 分

$\therefore \cos\angle ACD = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………………………………5 分

所以平面 ECD 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………6 分

【解法 2】取 AC 中点 O，连接 OB，作 $Oz // AD$，由已知可知 Oz, OB, AC 两两垂直，故可建立如下图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ ……………………………1 分【注：若第一问已经建系，则不重复给分】



$A(0,-1,0)$，$D(0,-1,2)$，$C(0,1,0)$，$E(\sqrt{2},0,1)$

所以 $\overrightarrow{CD}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{2},1,-1)$ ……………………………………2 分

若 $\vec{n}=(j,k,l)$ 是面 ECD 的一个法向量，即 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0-2k+2l=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{2}j+k-l=0\end{cases}$

令 $l=1$，则 $j=0$，$k=1$，即 $\vec{n}=(0,-1,1)$ ……………………………………………………3 分

而平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$ ……………………………………………………4 分

设平面 ECD 与平面 ABC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\dfrac{0+0+2}{2\times\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………5 分

所以平面 ECD 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………6 分

【解法 3】由题可知，$AD\perp$ 平面 ABC，$AD//BE$，$BE\perp$ 平面 ABC ……………………………1 分

所以 ΔCDE 在底面的投影为 ΔABC ……………………………2 分【注：无本步骤，本得分点不得分】

在等腰 ΔCDE 中，$CE=DE=2$，$CD=\sqrt{2}$，$S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$， ………………………3 分

同理在等腰 ΔABC 中，$AB=BC=\sqrt{3}$，$CA=2$，$S_{\Delta CAB}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ ……………………4 分

设平面 ECD 与平面 ABC 夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………5 分

所以平面 ECD 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ………………………………………………6 分

20.（本小题满分 12 分，其中第一小问 6 分，第二小问 6 分）

【解析】（1）根据题意知，X 的可能取值为 $-15,0,15,30$ ……………………………………1 分

可得 $P(X=-15)=0.4\times0.5\times0.75=0.15$

$P(X=0)=0.6\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.25=0.425$ ………………………2 分

$P(X=15)=0.4\times0.5\times0.25+0.6\times0.5\times0.25+0.6\times0.5\times0.75=0.35$

$P(X=30)=0.6\times0.5\times0.25=0.075$ …………………………………………………………3 分

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为

X	-15	0	15	30
P	0.15	0.425	0.35	0.075

…………4 分

$\therefore E(X)=-15\times0.15+0\times0.425+15\times0.35+30\times0.075$ …………5 分

$=5.25$ …………6 分

（2）设教师甲在三个项目中获胜的事件依次为A,B,C，由题知A,B,C相互独立，

则教师甲获得冠军的概率$p_1=P(ABC)+P(\overline{A}BC)+P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})$ …………1 分

$=0.4\times0.5\times0.75+0.6\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.75+0.4\times0.5\times0.25$

$=0.15+0.225+0.15+0.05=0.575$ …………2 分

由对立事件的概率公式，可得$p_2=1-p_1=0.425$ …………3 分

$\therefore\sqrt{\dfrac{2\left|p_1^2-p_2^2\right|}{5}+0.1}=\sqrt{0.16}=0.4$，解得$|p_1-p_2|=0.15$ …………4 分

$\because|p_1-p_2|<\sqrt{\dfrac{2\left|p_1^2-p_2^2\right|}{5}+0.1}$ …………5 分

$\therefore$甲、乙获得冠军的实力没有明显差别 …………6 分

21.（本小题满分 12 分，其中第一小问 5 分，第二小问 7 分）

【解析】（1）由题意知：$c=1$，$D(\frac{a}{2},0)$ …………1 分

$\therefore|BD|=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}$，而$|DF|=\dfrac{a}{2}+1$，$\therefore\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b^2}=\dfrac{a}{2}+1$，即$b^2=a+1$ …………2 分

又$\because a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2-a-2=0\ (a>0)$，解得$a=2$， …………3 分

故$b^2=3$ …………4 分

$\therefore C$的方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ …………5 分

（2）**【解法 1】**令$M(2,m)$，$N(2,n)$，则$T(2,\dfrac{m+n}{2})$，而$A(-2,0)$

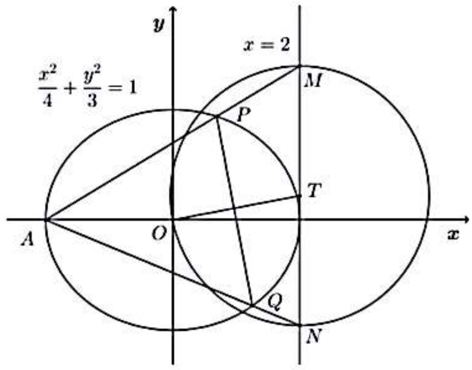
$\therefore$可设直线$AM:y=\dfrac{m}{4}(x+2)$ …………1 分

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=\dfrac{m}{4}(x+2)\end{cases}$ 整理得$(m^2+12)x^2+4m^2x+4m^2-48=0$ …………2 分

若$P(x_1,y_1)$，则由韦达定理得：$x_1-2=-\dfrac{4m^2}{m^2+12}$

$\therefore x_1=\dfrac{2(12-m^2)}{m^2+12}$，则$y_1=\dfrac{12m}{m^2+12}$ …………3 分

同理，直线 $BN: y=\frac{n}{4}(x+2)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\frac{n}{4}(x+2)\end{cases}$



若 $Q(x_2,y_2)$，可得 $x_2=\frac{2(12-n^2)}{n^2+12}$，则 $y_2=\frac{12n}{n^2+12}$ …………4 分

$\therefore k_{PQ}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{6(mn-12)(n-m)}{24(n^2-m^2)}=\frac{mn-12}{4(n+m)}$ …………5 分

又 $\because OM\perp ON$，$\therefore \frac{m}{2}\cdot\frac{n}{2}=-1 \therefore mn=-4$，

$\therefore k_{PQ}=-\frac{4}{n+m}$，而 $k_{OT}=\frac{n+m}{4}$ ……………………………………6 分

$\therefore k_{PQ}\cdot k_{OT}=-1$，则直线 PQ 与直线 OT 垂直，得证. ……………………………7 分

【解法 2】 令 $M(2,m)$，$N(2,n)$，则 $T(2,\frac{m+n}{2})$

由 MN 为直径 $\therefore OM\perp ON$,即 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ 所以 $4+mn=0$ $\because k_{AM}=\frac{m-0}{2-(-2)}=\frac{m}{4}$

则可设直线 l_{AM}：$y=\frac{m}{4}(x+2)$ ……………………………………1 分

联立椭圆方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\frac{m}{4}(x+2)\end{cases}$ 整理得 $(m^2+12)x^2+4m^2x+4m^2-48=0$ …………2 分

若 $P(x_1,y_1)$，则由韦达定理得：$x_1\cdot(-2)=-\frac{4m^2}{m^2+12}$

$\therefore x_1=\frac{2(12-m^2)}{m^2+12}$，则 $y_1=\frac{12m}{m^2+12}$ ……………………………3 分

$\therefore P(\frac{2(12-m^2)}{m^2+12},\frac{12m}{m^2+12})$ 同理 $\therefore Q(\frac{2(12-n^2)}{n^2+12},\frac{12n}{n^2+12})$ …………4 分

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(\frac{2(12-m^2)}{m^2+12}-\frac{2(12-n^2)}{n^2+12},\frac{12m}{m^2+12}-\frac{12n}{n^2+12})$， …………5 分

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QT}=\frac{4(12-n^2)}{n^2+12}-\frac{4(12-m^2)}{m^2+12}+\frac{6mn}{n^2+12}+\frac{6n^2}{n^2+12}-\frac{6m^2}{n^2+12}-\frac{6mn}{n^2+12}$

$\therefore \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QT}=\frac{24+2n^2}{n^2+12}-\frac{24+2m^2}{m^2+12}=2-2=0$ …………6 分

$\therefore \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OT}$,即 $PQ\perp OT$ ……………………………7 分

22.（本小题满分 12 分，其中第一小问 5 分，第二小问 7 分）

【解析】(1) 由题知: $f'(x)=\frac{1}{x}-a-\frac{a}{x^2}=-\frac{ax^2-x+a}{x^2}(x>0)$ ……………………………1 分

设函数 $g(x)=ax^2-x+a$，

当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$g(x)$ 开口向上，$\Delta=1-4a^2\leq0$，

所以 $f'(x)\leq0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值点； ……………………………2 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个解 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2a},x_2=\frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2a}$ …………3 分

又因为 $x_1x_2=1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,\ x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减……………4 分

所以 $f(x)$ 有两个极值点

综上：当 $a\geq\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 无极值点；当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有两个极值点………………………5 分

(2) (i)由(1)知 $0<a<\frac{1}{2}$，且 $x_1x_2=1$

又因为 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{1}{x}-a\left(\frac{1}{x}-x\right)=-\ln x-a\left(\frac{1}{x}-x\right)=-f(x)$

所以 $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=0$. ……………………………………………………………1 分

(ii)由(i)知: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$，$0<a<\frac{1}{2}$，$t_1<x_1<t_2=1<x_2<t_3$

所以 $t_1t_3=1$，所以 $t_1t_2t_3=1$ ……………………………………………………………………2 分

令 $h(x)=x\ln x,x>0$，$h'(x)=\ln x+1$

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增

因为 $x>1$ 时，$h(x)>0$；$0<x<1$ 时，$h(x)<0$.

所以 $0<m<\frac{1}{e}<n<1$. ……………………………………………………………………3 分

所以，要证明: $\frac{(1-m)e^{-m}}{t_1t_2t_3}>n(\ln n+1)$

只需证: $(1-m)e^{-m}>n(\ln n+1)$

只需证: $\ln\left[(1-m)e^{-m}\right]>\ln\left[n(\ln n+1)\right]$

只需证: $\ln(1-m)-m>\ln n+\ln(\ln n+1)$

只需证: $\ln(1-m)+1-m>\ln n+1+\ln(\ln n+1)$ ……………………………………………4 分

又因为 $t(x)=\ln x+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

所以只需证: $1-m>\ln n+1$.

令 $v(x)=x-(\ln x+1)\left(\frac{1}{e}<x<1\right)$，所以 $v'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}<0$，

所以函数 $v(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递减;

所以 $v(x)>v(1)=0$，即 $n>\ln n+1$.

所以，要证：$1-m>\ln n+1$，只需证：$1-m>n$，即证明: $m+n<1$，……………………………5 分

因为 $0<m<\frac{1}{e}$，所以 $\ln m<-1$，所以 $m\ln m<-m$

又因为 $m\ln m=n\ln n$

所以 $m<-n\ln n$，所以 $m+n<n-n\ln n$ ……………………………………………………6 分

令 $\varphi(x)=x-x\ln x$，$\frac{1}{e}<x<1$，则 $\varphi'(x)=-\ln x>0$

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},1\right)$ 上单调递增，所以 $\varphi(n)<\varphi(1)=1$，

所以 $m+n<1$，所以 $\frac{(1-m)e^{-m}}{t_1t_2t_3}>n(\ln n+1)$ 成立. ……………………………………………7 分