# 2022～2023 学年高三年级 5 月质量检测·数学
## 参考答案、提示及评分细则

**一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.** 更多试题与答案，

1.B　$2+z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}\Rightarrow z=-1+\mathrm{i}$，则 $\bar{z}=-1-\mathrm{i}$. 故选 B.

2.D　$\because M=[1,5)$，$N=(3,+\infty)$，$\therefore M\cap N=(3,5)$. 故选 D.

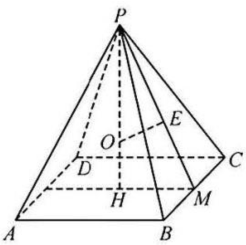
3.C　$V_{半球}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot2^3=\frac{16}{3}\pi$，$S_{柱}=\pi\cdot2^2=4\pi$，故水面高度 $h=\frac{V_{半球}}{S_{柱}}=\frac{\frac{16}{3}\pi}{4\pi}=\frac{4}{3}$. 故选 C.

4.A　$\because\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，$\therefore m=-\frac{3}{4}$，$n=\frac{1}{4}$，$\therefore m+n=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

5.C　$\frac{C_5^m\cdot C_4^{4-m}}{C_9^4}=\frac{10}{21}\Rightarrow C_5^m\cdot C_4^m=60$，$m$ 可取值为 0,1,2,3,4，检验得 $m=2$. 故选 C.

6.A　由 $f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 可知：$f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故 $\omega\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$\omega=4k+\frac{2}{3}$，$k=0$ 时，$\omega$ 取最小值为 $\frac{2}{3}$. 故选 A.

7.D　由 $\ln(1+0.1)<0.1$ 知：$b<a$，又 $c=\frac{2}{21}<\frac{2}{20}=0.1=a$，以下比较 $b,c$ 大小，$c=\frac{2}{21}=\frac{0.2}{2.1}=\frac{2\times0.1}{2+0.1}$，构造：$f(x)=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{4}{(2+x)^2}=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0$，故 $f(x)$ 为增函数，$f(0.1)>f(0)\Rightarrow\ln1.1>\frac{2}{21}$，故 $b>c$，故选 D.




8.D　设球心为 $O$，$O$ 在平面 $ABCD$ 内的射影为 $H$，$M$ 为 $BC$ 中点，$OH\perp PM$ 于 $E$，半径为 $r$，$AB=\frac{5}{2}r=x$，$PH=h$，则 $\triangle POE\backsim\triangle PMH\Rightarrow\frac{r}{\frac{5}{4}r}=\frac{h-r}{\sqrt{h^2+\left(\frac{5}{4}r\right)^2}}\Rightarrow\frac{h}{r}=\frac{50}{9}$，$\tan\angle PAH=\frac{h}{AH}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{h}{r}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$. 故选 D.

**二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9.BCD　根据题意可得 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_3=\frac{1}{8}$，故 B 正确；$\frac{a_5}{a_2}=q^3=\frac{1}{8}$，故 A 错误；$a_3=\frac{1}{8}$，$a_4=\frac{1}{16}$，则 $a_3-a_4=\frac{1}{16}$，故 C 正确；$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{32}$，故 D 正确. 故选 BCD.

10.AD　A：$f(x)=0\Leftrightarrow x-1-\ln x=0$，$x-1\geqslant\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，故 B 错误，D 正确；B：$f'(x)=2x-2-\ln x$，$f''(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$，在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上，$f''(x)<0$，$f'(x)$ 为减函数，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上，$f''(x)>0$，$f'(x)$ 为增函数，又 $f'\left(\frac{1}{e^2}\right)>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$，$f'(1)=0$，有 2 个零点，A 正确，C 错误. 故选 AD.

11.BC　设 $l:x=ny-1$ 代入 $y^2=2px=2p(ny-1)\Rightarrow y^2-2pny+2p=0$　①，故 $\Delta=(2pn)^2-4\cdot2p=0\Rightarrow p=\frac{2}{n^2}$，代入①式得 $\left(y-\frac{2}{n}\right)^2=0$，$\therefore y=\frac{2}{n}=p$ 与 $p=\frac{2}{n^2}$ 得 $n=1$，$p=2$，故 A 错误，B 正确；C：$Q(1,2)$，$k_{QA}+k_{QB}$

$=\frac{y_A-2}{x_A-1}+\frac{y_B-2}{x_B-1}=\frac{y_A-2}{\frac{y_A^2}{4}-1}+\frac{y_B-2}{\frac{y_B^2}{4}-1}=\frac{4}{y_A+2}+\frac{4}{y_B+2}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{y_Ay_B+2(y_A+y_B)+4}=\frac{4(y_A+y_B+4)}{4+2(y_A+y_B)+4}=2$，故 C 正确；D：设直线 $m:x=ty-1$ 代入 $y^2=4x=4(ty-1)\Rightarrow y^2-4ty+4=0$，$y_Ay_B=4$，故 D 错误. 故选 BC.

12. ABC　由 $f(3-x)=f(1+x)$ 得 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称，故 $g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1=f(2x)$ 关于 $x=1$ 对称，故 $g(x)$ 关于 $x=\frac{3}{2}$ 对称，由 $g(2-x)+g(x)=2$ 得 $g(x)$ 关于 $(1,1)$ 中心对称，故 $g(x)$ 的周期为 2，B 正确；$f(2x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$ 的周期为 2，故 $f(x)$ 的周期为 4，故 $x=2+4$ 是 $f(x)$ 的一条对称轴，A 正确；C：$f(2x)=g\left(x+\frac{1}{2}\right)-1$ 的对称中心 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，故 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,0)$ 与之关于 $x=2$ 对称的点为 $(3,0)$ 是 $f(x)$ 的对称中心，故 C 正确；D：对 $k\in\mathbf{Z}$，$f(4k)+f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$，其中 $f(0)+f(2)=0$，$f(1)=f(3)=0$，故 $f(4k)+f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)=0$，$[f(4)+f(5)+f(6)+f(7)]+\cdots+[f(2020)+f(2021)+f(2022)+f(2023)]=0$，对 $f(3)=0$，$f(2)=f(0)>0$，故 $n$ 的最小值为 3，D 错误. 故选 ABC.

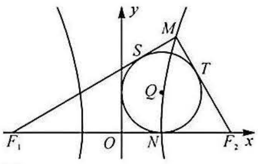
**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 32　$\left(2+\frac{1}{x}\right)^2(2x-1)^3=\frac{(4x^2-1)^2(2x-1)}{x^2}$，$x^3$ 项的系数即分子展开式中 $x^5$ 项的系数，$x^5$ 项：$C_2^0\cdot(4x^2)^2\cdot 2x$，系数为 32.

14. $2\sqrt{3}$　$a+b\geqslant\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\Rightarrow(a+b)^2\geqslant\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)(a+b)=6+\frac{3b}{a}+\frac{3a}{b}\geqslant 12$，$a+b\geqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 $a=b=\sqrt{3}$ 时取等号.

15. $[2,+\infty)$　$f'(x)=\left[a-\frac{2}{x}+a(x-1)-2\ln x\right]e^x=\left[ax-\frac{2}{x}-2\ln x\right]e^x\geqslant 0$，即 $ax-\frac{2}{x}-2\ln x\geqslant 0$，对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，当 $a\geqslant 2$ 时，$ax-\frac{2}{x}-2\ln x\geqslant 2x-\frac{2}{x}-2\ln x=g(x)$，$g'(x)=2+\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2x+2}{x^2}>0$，故 $g(x)>g(1)=0$ 符合题意，当 $a<2$ 时，$g(1)=a-2<0$，$\exists m\in(1,+\infty)$，在 $(1,m)$ 上，$g(x)<0$ 不合题意，故 $a\geqslant 2$.

16. $\sqrt{3}+1$　内切圆 $Q$ 分别与 $F_1M$，$F_2M$，$F_1F_2$ 切于点 $S$，$T$，$N$，则四边形 $QSMT$ 为正方形，故 $|F_1M|+|F_2M|-|F_1F_2|=2a$，$|F_1M|-|F_2M|=2a$，$|F_1M|=c+2a$，$\therefore(c+2a)^2+c^2=(2c)^2\Rightarrow c^2=2a^2+2ac$，$e=\sqrt{3}+1$.




**四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.**

17. 解：(1) 根据题意可得 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+4(n-1)=4n-2$，…… 2 分

则 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(4n-6)+(4n-10)+\cdots+2+\left(-\frac{1}{2}\right)=2(n-1)^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2n-1)(2n-3)$；…… 5 分

(2) $\because\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}=\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}$，…… 7 分

$\therefore S_{2023}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2023}}=-\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4043}-\frac{1}{4045}=-\frac{4046}{4045}$. …… 10 分

18. 解：(1) 零假设为 $H_0$：保护动物意识的强弱与性别相互独立，即保护动物意识的强弱与性别无关，

由题意，$\chi^2=\frac{200\times(70\times 60-30\times 40)^2}{100\times 100\times 110\times 90}=\frac{200}{11}\approx 18.182>6.635=x_{0.010}$. …… 3 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.010$ 的独立性检验，我们推断 $H_0$ 不成立.

即认为保护动物意识的强弱与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.010；…… 4 分

(2) 由题意可知：在女性的市民中抽到 1 人“保护动物意识强”的概率为 $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$，

所以 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，$X$ 的所有可能取值为 0,1,2,3，…………………………………………………… 5 分

$P(X=0)=C_3^0\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，…………………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=C_3^1\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，……………………………………………………… 7 分

$P(X=2)=C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}$，…………………………………………………… 8 分

$P(X=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，………………………………………………………………… 9 分

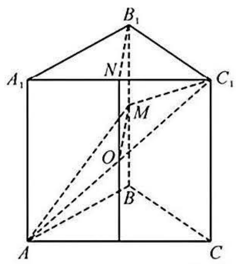
所以 $X$ 的分布列为更多试题与答案，关注微信公众号：三晋高中指南

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ |

………………………………………………………………………………………… 11 分

$E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)作 $B_1N\perp A_1C_1$ 于 $N$，则 $B_1N\perp$ 平面 $ACC_1A_1$，




作 $MO\perp AC_1$ 于 $O$，则 $MO\perp$ 平面 $ACC_1A_1$，故 $B_1N/\!/MO$，…………………… 2 分

$BB_1/\!/$ 平面 $ACC_1A_1\Rightarrow BB_1/\!/NO$，故四边形 $MONB_1$ 为平行四边形，

故 $NO/\!/AA_1$ 且 $NO=B_1M=\frac{1}{2}AA_1$，故 $O$ 为 $AC_1$ 中点，$MA=MC_1$，……… 4 分

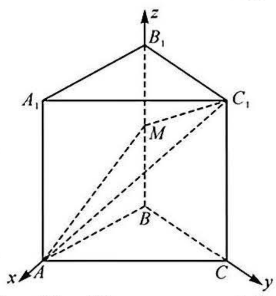
设 $AB=BC=x$，则 $\cos 120^\circ=\frac{x^2+4+x^2+4-(2x^2+16)}{2(x^2+4)}\Rightarrow x=2$；…………… 6 分

(2)以 $B$ 为原点，$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$、$\overrightarrow{BB_1}$ 方向分别为 $x,y,z$ 轴的正方向，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，…………………………………………………………………………………… 8 分

则 $A(2,0,0)$，$M(0,0,2)$，$C_1(0,2,4)$，

平面 $ABC$ 的法向量为 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,4)$，

设平面 $AMC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，




则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+2z=0,\\ -2x+2y+4z=0,\end{cases}$ …………………………………… 10 分

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$，

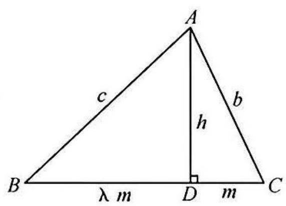
$\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{BB_1}|}=\frac{0\times1+0\times(-1)+4\times1}{\sqrt{3}\times4}=\frac{4}{4\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. … 12 分

20. (1)证明：由题意得 $\sin^2C-\cos 2C=\cos C\cos(A-B)\Rightarrow 1-\cos 2C=\cos^2C+\cos C\cos(A-B)$ ………… 2 分

$=\cos C[\cos C+\cos(A-B)]=\cos C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=\cos C\cdot 2\sin A\sin B$，……………… 4 分

即 $2\sin^2C=\cos C\cdot 2\sin A\sin B$，由正弦定理得 $c^2=ab\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\Rightarrow a^2+b^2=3c^2$； ………… 6 分

(2)解：设 $DC=m$，$AD=h$，则 $a=(\lambda+1)m$，



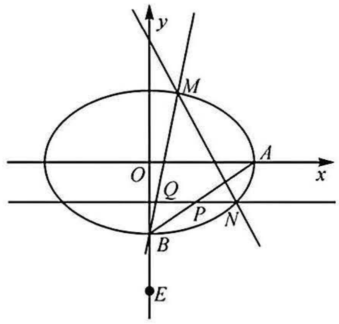

由(1)知：$(\lambda+1)^2m^2+h^2+m^2=3(\lambda^2m^2+h^2)\Rightarrow(2\lambda^2-2\lambda-1)m^2=m^2-2h^2$，

$\therefore 2\lambda^2-2\lambda-1=1-2\cdot\left(\frac{h}{m}\right)^2=1-2\tan^2C$，…………………………………… 8 分

由 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{3}}{2ab}=\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant\frac{2}{3}$，

又由 $\begin{cases}a^2+c^2>b^2,\\ b^2+c^2>a^2,\\ c^2=\frac{a^2+b^2}{3}\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{b}{a}<\sqrt{2}$，$\therefore\cos C=\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$，……………………………………… 10 分

故 $\frac{2}{3}\leqslant\cos C<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 1<\tan C\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\begin{cases}2\lambda^2-2\lambda-1<-1,\\ 2\lambda^2-2\lambda-1\geqslant-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow 0<\lambda<1$. ………………………………… 12 分




21. 解：(1)由 $\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4},\end{cases}$ …………………… 2 分

由 $a>b>0$ 可知 $\begin{cases}a^2=\frac{5}{4},\\ b^2=\frac{15}{4}\end{cases}$ 不合题意，故 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1\end{cases}$

故椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；………………………………… 4 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$Q(x_0,y_0)$，$MN$ 直线方程为 $y=kx+t$，

由 $k_{BM}=k_{BQ}\Rightarrow\frac{y_1+1}{x_1}=\frac{y_2+1}{x_0}\Rightarrow x_0=\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}$，…………………… 6 分

设 $NQ$ 的中点为 $P$，$P(x',y')$，

则 $x'=\frac{x_0+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{x_1(y_2+1)}{y_1+1}+x_2\right]=\frac{2kx_1x_2+(t+1)(x_1+x_2)}{2(kx_1+t+1)}$，$y'=y_2=kx_2+t$，

将 $(x',y')$ 代入直线 $AB$ 方程：$x-2y-2=0$，

整理得 $(2k-4k^2)x_1x_2+(t+1)(1-4k)(x_1+x_2)-4(t+1)^2=0(*)$，

将 $y=kx+t$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 整理得 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，……………………………… 8 分

$\therefore x_1x_2=\frac{4t^2-4}{1+4k^2}$，$x_1+x_2=\frac{-8kt}{1+4k^2}$，代入$(*)$式整理得 $(2k-4k^2)(4t-4)+(1-4k)(-8kt)-4(t+1)(1+4k^2)=0\Rightarrow t=-2k-1$，…………………………………………………………………… 10 分

故直线 $l$ 方程为 $y=kx-2k-1$，恒过定点 $S(2,-1)$，

作 $ET\perp l$ 于 $T$，$|ET|\leqslant|ES|=\sqrt{5}$，当且仅当 $l$ 斜率为 $-2$ 时取等号. $\therefore d$ 的最大值为 $\sqrt{5}$. ………… 12 分

22. (1)解：令 $f'(x)=e^x-a\sin x=0\Rightarrow a=\frac{e^x}{\sin x}=g(x)$，………………………………………………… 1 分

$g'(x)=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$，在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，值域为 $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},+\infty\right)$，………… 2 分

在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 为增函数，值域为 $\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$，……………………………………… 3 分

故当 $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}<a<e^{\frac{\pi}{2}}$ 时，$a=\frac{e^x}{\sin x}$ 有两解，即原函数有两个极值点；……………………………………… 4 分

(2)证明：构造函数 $h(x)=e^x-\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-x-1$，令 $H(x)=h'(x)$，

由 $H'(x)=e^x-1>0\Rightarrow h'(x)$ 为增函数，故 $h'(x)>h'(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$h(x)$ 为增函数，$h(x)>h(0)=0$，当 $x>0$ 时，$e^x>\frac{x^2}{2}+x+1$，…………………………… 6 分

故在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$e^x+a\cos x>\frac{x^2}{2}+x+1+\cos x$，只须证：$\frac{x^2}{2}+x+1+\cos x>2+x$，

即证：$\cos x-1+\frac{x^2}{2}>0$，令 $p(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，则 $p'(x)=-\sin x+x$，令 $m(x)=p'(x)$，

$m'(x)=1-\cos x>0$，故 $p'(x)$ 为增函数，$p'(x)>p'(0)=0\Rightarrow p(x)$ 为增函数，$p(x)>p(0)=0$，

即 $\cos x-1+\frac{x^2}{2}>0$，………………………………………………………………………………… 8 分

在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上，$e^x+a\cos x\geqslant e^x-a\geqslant e^x-e^{\frac{\pi}{2}}+2+\frac{\pi}{2}$，

故只须证：$e^x-e^{\frac{\pi}{2}}+2+\frac{\pi}{2}>2+x$，即证：$e^x-x-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}>0$，……………………………………… 10 分

令 $g(x)=e^x-x-e^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}$，$g'(x)=e^x-1>0$，

故 $g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，故原不等式得证. ………………………………………………………… 12 分

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。