高三数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡指定位置上.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.
   回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,4\}$　　B. $[0,+\infty)$　　C. $\{-1,2\}$　　D. $\{(-1,1),(2,4)\}$

2.已知复数 z 是纯虚数，$\dfrac{1+z}{1-\mathrm{i}}$ 是实数，则 $\overline{z}=$

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. $2\mathrm{i}$

3.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=-7$，$S_6=-63$，则公比 $q=$

A. -2　　B. 2　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

4.已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，且 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 $2+\sqrt{3}$，则 $<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

5. $\dfrac{\cos 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}-2\cos 10^{\circ}=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

6.《史记》卷六十五《孙子吴起列传第五》中有这样一道题：齐王与田忌赛马，田忌的上等马优于齐王的中等马，劣于齐王的上等马；田忌的中等马优于齐王的下等马，劣于齐王的中等马；田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现两人进行赛马比赛，比赛规则为：每匹马只能用一次，每场比赛双方各出一匹马，共比赛三场. 每场比赛中胜者得1分，否则得0分. 若每场比赛之前彼此不知道对方所用之马，则比赛结束时，齐王得2分的概率为

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{5}{6}$

7.已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，上顶点为 B，直线 BF 与 C 相交于另一点 A，点 A 在 x 轴上的射影为 A_1，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{A_1A}$，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=\frac{3\pi}{8}$，设函数$f(x)=(4\cos^2\frac{x}{2}-2)\sin x+\cos 2x+2$，记$y_n=f(a_n)$，则数列$\{y_n\}$的前9项和为

A. 0　　B. 10　　C. 16　　D. 18

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分．

9. 甲袋中装有4个白球，2个红球和2个黑球，乙袋中装有3个白球，3个红球和2个黑球．先从甲袋中随机取出一球放入乙袋，再从乙袋中随机取出一球．用A_1，A_2，A_3分别表示甲袋取出的球是白球、红球和黑球，用B表示乙袋取出的球是白球，则

A. A_1，A_2，A_3两两互斥　　B. $P(B|A_2)=\frac{1}{3}$

C. A_3与B是相互独立事件　　D. $P(B)=\frac{1}{3}$

10. 已知函数$f(x)=|\sin x|\cos x+1$，则

A. $f(x)$为周期函数　　B. $f(x)$在$(-\pi,-\frac{3}{4}\pi)$上单调递增

C. $f(x)$的值域为$[0,1]$　　D. $y=f(x)$的图像关于直线$x=3\pi$对称

11. 已知棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，过BD_1的平面α交棱AA_1于点E，交棱CC_1于点F，则

A. $\overline{BF}=\overline{ED_1}$　　B. 存在E，F，使得$EF\perp$平面DBB_1D_1

C. 四边形BFD_1E面积的最大值为$2\sqrt{6}$　　D. 平面α分正方体所得两部分的体积相等

12. 已知函数$f(x)=\begin{cases}1-|x+1|, & x<0\\ f(x-2), & x\geqslant 0\end{cases}$，则

A. $f(-4)+f(2021)=0$

B. $f(\log_3 6)<f(\log_5 10)<f(\log_6 12)$

C. 若函数$g(x)=f(x)-kx-1$恰有3个零点，则$k\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$

D. 当$x\in(2k-\frac{3}{2},2k-\frac{1}{2})(k\in\mathbf{N})$时，$f(x)>\frac{1}{2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.在 $(x-\frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中，只有第 4 项的二项式系数最大，则展开式中含 x^3 项的系数为_________.

14.已知抛物线 C_1：$y^2=8x$，圆 C_2：$x^2+y^2-4x+3=0$，点 $M(1,1)$，若 A，B 分别是 C_1，C_2 上的动点，则 $|AM|+|AB|$ 的最小值为_________.

15.已知函数 $f(x)=x(e^x+1)$，$g(x)=(x+1)\ln x$，若 $f(x_1)=g(x_2)=m\ (m>1)$，则 $\frac{x_1+x_1x_2}{\ln m}$ 的最小值为_________.

16.在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$AC\perp CB$，$PA=AC=BC=4$.以 A 为球心，表面积为 36π 的球面与侧面 PBC 的交线长为_________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$B=60^\circ$，$a^2=b^2+c^2-bc$，延长 BC 至 D，使 $BD=7$，ΔACD 的面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 AB 的长；

（Ⅱ）求 ΔACD 外接圆的面积.

18.（本小题满分 12 分）

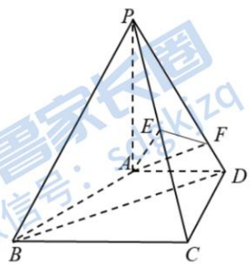
已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_2-a_1}+\frac{2}{a_3-a_2}+\frac{3}{a_4-a_3}+\cdots\cdots+\frac{n}{a_{n+1}-a_n}=2^{n+1}-2$.

（Ⅰ）设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若 $a_1=2$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$AD\perp DC$，$BC=2AD=2CD=\frac{4}{3}AP=4$，$E$ 为 PC 的中点，点 F 在 PD 上且 $PF=3FD$.



（Ⅰ）求证：$BD\parallel$ 平面 AEF；

（Ⅱ）求二面角 $E-AF-D$ 的余弦值.

20.（本小题满分 12 分）

学习强国中有两项竞赛答题活动，一项为“双人对战”，另一项为“四人赛”. 活动规则如下：一天内参与“双人对战”活动，仅首局比赛可获得积分，获胜得 2 分，失败得 1 分；一天内参与“四人赛”活动，仅前两局比赛可获得积分，首局获胜得 3 分，次局获胜得 2 分，失败均得 1 分. 已知李明参加“双人对战”活动时，每局比赛获胜的概率为 $\frac{1}{2}$；参加“四人赛”活动（每天两局）时，第一局和第二局比赛获胜的概率分别为 p，$\frac{1}{3}$. 李明周一到周五每天都参加了“双人对战”活动和“四人赛”活动（每天两局），各局比赛互不影响.

（Ⅰ）求李明这 5 天参加“双人对战”活动的总得分 X 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设李明在这 5 天的“四人赛”活动（每天两局）中，恰有 3 天每天得分不低于 3 分的概率为 $f(p)$. 求 p 为何值时，$f(p)$ 取得最大值.

21.（本小题满分 12 分）

已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0, b>0$）的左焦点为 F，右顶点为 A，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，F 到渐近线的距离为 $\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 过 F，且与 C 交于 P，Q 两点（异于 C 的两个顶点），直线 $x=t$ 与直线 AP，AQ 的交点分别为 M，N. 是否存在实数 t，使得 $|\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}|=|\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FN}|$？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+1-a)$.

（Ⅰ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，若 $f(m)>f(n)>f(z)=1$，试比较 $\ln mn+ze^z$，$\ln mz+ne^n$，$\ln nz+me^m$ 的大小，并说明理由.

高三数学参考答案

一、单项选择题：（每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	D	A	C	A	D

二、多项选择题：（每小题 5 分，共 20 分）

题号	9	10	11	12
答案	AB	AD	ABD	BCD

三、填空题：（每小题 5 分，共 20 分）

13. 15　　14. 2　　15. e　　16. π

四、解答题：

17.（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）因为 $a^2=b^2+c^2-bc$，

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，因为 $0^\circ<A<120^\circ$，所以 $A=60^\circ$，　　------------2分

故 ΔABC 为正三角形，设 AB 长为 x，则 $AC=x$，$CD=7-x$，

所以 ΔACD 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(7-x)\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(7-x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，　　------------4 分

即 $x^2-7x+6=0$，解得 $x=1$ 或 $x=6$，

所以 AB 的长为 1 或 6.　　------------5分

（Ⅱ）因为 ΔABC 为正三角形，

所以 $AC=AB=1$，$CD=6$ 或 $AC=AB=6$，$CD=1$，

所以 $AC^2+CD^2=1^2+6^2=37$，$AC\cdot CD=6$，

又因为 $\angle ACD=120^\circ$，

由余弦定理可知 $AD^2=AC^2+CD^2-2AC\cdot CD\cos120^\circ=37+6=43$，　　------------7分

设 ΔACD 外接圆的半径为 R，因为 $\left(\dfrac{AD}{\sin120^\circ}\right)^2=(2R)^2$，　　------------8分

可得 $R^2=\dfrac{43}{3}$，　　------------9分

所以 ΔACD 外接圆的面积为 $\pi R^2=\dfrac{43}{3}\pi$.　　------------10分

18.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{a_2-a_1}=2$，所以 $b_1=a_2-a_1=\dfrac{1}{2}$，　　------------1 分

由 $\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{2}{a_3-a_2}+\dfrac{3}{a_4-a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{a_n-a_{n-1}}+\dfrac{n}{a_{n+1}-a_n}=2^{n+1}-2$，

可得当$n\geqslant 2$时，$\dfrac{1}{a_2-a_1}+\dfrac{2}{a_3-a_2}+\dfrac{3}{a_4-a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-1}{a_n-a_{n-1}}=2^n-2$，

两式相减得$\dfrac{n}{a_{n+1}-a_n}=2^n$， ---------------2 分

所以$b_n=a_{n+1}-a_n=\dfrac{n}{2^n}$，当$n=1$时，$b_n=\dfrac{n}{2^n}$也成立， ---------------3 分

所以$b_n=\dfrac{n}{2^n}$. ---------------4 分

（Ⅱ）由$a_{n+1}-a_n=\dfrac{n}{2^n}$可得

$a_2-a_1=\dfrac{1}{2}$,

$a_3-a_2=\dfrac{2}{2^2}$,

…… ---------------5 分

……

$a_{n-1}-a_{n-2}=\dfrac{n-2}{2^{n-2}}$,

$a_n-a_{n-1}=\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$,

相加得，当$n\geqslant 2$时，$a_n-a_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-2}}+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$， ---------------6 分

令$x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-2}}+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}$，①

①$\times\dfrac{1}{2}$得$\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{2}{2^3}+\dfrac{3}{2^4}+\cdots\cdots+\dfrac{n-2}{2^{n-1}}+\dfrac{n-1}{2^n}$，②

①$-$②得$\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n-1}{2^n}$， ---------------8 分

$\dfrac{1}{2}x=\dfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{n-1}{2^n}$，

$\dfrac{1}{2}x=1-\dfrac{n+1}{2^n}$，$x=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$，所以$a_n-a_1=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$， ---------------10 分

所以$a_n=4-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$，$n\geqslant 2$， ---------------11 分

当$n=1$时，$a_n=4-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$也成立.

所以$a_n=4-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$. ---------------12 分

19.（本小题满分 12 分）

证明：（Ⅰ）在棱 PC 上取点 M，使得 $EM=\frac{1}{3}EC$，连接 AC 交 BD 于点 N，

连接 MN，MD. --------------1 分

因为 E 为 PC 中点，所以 $PE=EC$，则 $\frac{PE}{EM}=\frac{3}{1}$，

因为 $PF=3FD$，所以 $\frac{PF}{FD}=\frac{3}{1}$，

故 $\frac{PE}{EM}=\frac{PF}{FD}$，所以 $EF\,/\!/\,MD$， --------------2 分

因为 $AD\,/\!/\,BC$，所以 $\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$，

因为 $EM=\frac{1}{3}EC$，所以 $\frac{EM}{MC}=\frac{1}{2}$，

故 $\frac{AN}{NC}=\frac{EM}{MC}$，所以 $AE\,/\!/\,MN$， ---------------4 分

因为 $AE\cap EF=E$，所以平面 $AEF\,/\!/$ 平面 BDM， ---------------5 分

又因为 $BD\subset$ 平面 BDM，

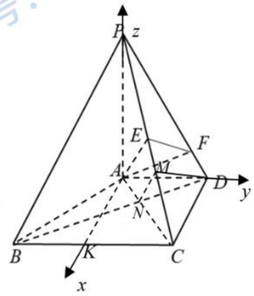
所以 $BD\,/\!/$ 平面 AEF. ---------------6 分

（也可建系用法向量证明）

（Ⅱ）取 BC 的中点 K，连接 AK，则 $AK\perp AD$，

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 AP，AK，AD 两两互相垂直.

以 A 为原点，$\overrightarrow{AK}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x，y，z 轴正方向，



建立如图所示的空间直角坐标系，由题意得

$A(0,0,0)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,3)$，$D(0,2,0)$， ----7 分

所以 $E(1,1,\frac{3}{2})$，$F(0,\frac{3}{2},\frac{3}{4})$，

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,1,\frac{3}{2})$，$\overrightarrow{AF}=(0,\frac{3}{2},\frac{3}{4})$，

设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y+\frac{3}{2}z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=\frac{3}{2}y+\frac{3z}{4}=0\end{cases}$，

令 $y=1$，可得 $z=-2$，$x=2$，则 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$， --------------9 分

因为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$ 为平面 AFD 的法向量， --------------10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{1\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{2}{3}$， ---------------11 分

所以二面角 $E-AF-D$ 的余弦值为 $-\dfrac{2}{3}$． ---------------12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）X 的取值范围是 $\{5,6,7,8,9,10\}$， ---------------1 分

$P(X=5)=(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$，　　$P(X=6)=C_5^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}$，

$P(X=7)=C_5^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^3=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$，　　$P(X=8)=C_5^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$，

$P(X=9)=C_5^4(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^1=\frac{5}{32}$，　　$P(X=10)=C_5^5(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$． ---------4 分

所以 X 的分布列为

X	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

---------5 分

$E(X)=5\times\frac{1}{32}+6\times\frac{5}{32}+7\times\frac{5}{16}+8\times\frac{5}{16}+9\times\frac{5}{32}+10\times\frac{1}{32}=\frac{240}{32}=\frac{15}{2}$． ----------6 分

（Ⅱ）（法一）由题意知“每天得分不低于 3 分”的概率为 $p+(1-p)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p$， --7 分

所以 5 天中恰有 3 天每天得分不低于 3 分的概率

$f(p)=C_5^3(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p)^3(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}p)^2=\frac{40}{243}(1+2p)^3(1-p)^2$， ---------------8 分

$f'(p)=\frac{40}{243}[6\times(1+2p)^2(1-p)^2-2\times(1+2p)^3(1-p)]$

$=\frac{40}{243}(1+2p)^2(1-p)(4-10p)$， ---------------10 分

当 $p\in(0,\frac{2}{5})$ 时，$f'(p)>0$，$f(p)$ 在 $(0,\frac{2}{5})$ 单增，

当 $p\in(\frac{2}{5},1)$ 时，$f'(p)<0$，$f(p)$ 在 $(\frac{2}{5},1)$ 单减， --------------11 分

所以当 $p=\frac{2}{5}$ 时，$f(p)$ 取得最大值． --------------12 分

(法二)设“每天得分不低于 3 分”的概率为 x，则 $x=p+(1-p)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p$， ----7 分

所以 5 天中恰有 3 天“每天得分不低于 3 分”的概率

$f(p)=g(x)=C_5^3x^3(1-x)^2$，　　--------------8 分

$g'(x)=C_5^3[3x^2(1-x)^2-2x^3(1-x)]$

$\quad =10x^2(1-x)(3-5x)$，　　--------------10 分

当 $x\in(0,\frac{3}{5})$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(0,\frac{3}{5})$ 单增，

当 $x\in(\frac{3}{5},1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(\frac{3}{5},1)$ 单减，　　--------------11 分

所以当 $x=\frac{3}{5}$，即 $p=\frac{2}{5}$ 时 $f(p)$ 取得最大值.　　--------------12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由题意可知 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，　　--------------1 分

又焦点 $(-c,0)$ 到 $\sqrt{3}x\pm y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}c}{2}=\sqrt{3}$，所以 $c=2$，　　--------------2 分

所以 $a^2+b^2=4$，解得 $a=1, b=\sqrt{3}$，　　--------------3 分

所以 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.　　--------------4 分

（Ⅱ）（法一）存在这样的实数 $t=-\frac{1}{2}$.　　--------------5 分

由题意知直线 l 斜率不为 0，可设直线 l 的方程为 $x=my-2$，设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}3x^2-y^2=3\\ x=my-2\end{cases}$ 得 $(3m^2-1)y^2-12my+9=0$，　　--------------6 分

由韦达定理得 $\begin{cases}3m^2-1\neq 0\\ \Delta=144m^2-36(3m^2-1)>0\\ y_1+y_2=\dfrac{12m}{3m^2-1}\\ y_1y_2=\dfrac{9}{3m^2-1}\end{cases}$，　　--------------8 分

直线 AP：$y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，直线 AQ：$y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，

当 $x=t$ 时，可得 $M(t, \frac{y_1}{x_1-1}(t-1))$，$N(t, \frac{y_2}{x_2-1}(t-1))$，　　--------------9 分

若 $|\overline{FM}+\overline{FN}|=|\overline{FM}-\overline{FN}|$，则 $\overline{FM}\cdot\overline{FN}=0$，

可得 $(t+2,\frac{y_1}{x_1-1}(t-1))\cdot(t+2,\frac{y_2}{x_2-1}(t-1))=0$， ------------10 分

即 $(t+2)^2+\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{y_2}{x_2-1}(t-1)^2=0$，

因为 $(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1$

$=(my_1-2)(my_2-2)-(my_1-2+my_2-2)+1$

$=m^2y_1y_2-3m(y_1+y_2)+9$

$=\frac{-9}{3m^2-1}$，

所以 $(t+2)^2-(t-1)^2=0$，可得 $t=-\frac{1}{2}$，

所以存在这样的实数 $t=-\frac{1}{2}$ 满足题意. ------------12 分

（法二）存在这样的实数 $t=-\frac{1}{2}$. ------------5 分

当直线 l 的斜率不存在时，$x=-2$，$P(-2,3)$，$Q(-2,-3)$，$A(1,0)$，$F(-2,0)$，

直线 AP：$y=-x+1$，AQ：$y=x-1$，可得 $M(t,1-t)$，$N(t,t-1)$，

若 $|\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}|=\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FN}|$，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，

即 $(t+2,1-t)\cdot(t+2,t-1)=0$，可得 $t=-\frac{1}{2}$. ------------6 分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立方程 $\begin{cases}3x^2-y^2=3\\y=k(x+2)\end{cases}$，得 $(3-k^2)x^2-4k^2x-4k^2-3=0$， ------------7 分

由韦达定理得 $\begin{cases}3-k^2\neq 0\\\Delta=16k^4+4(3-k^2)(4k^2+3)>0\\x_1+x_2=\frac{4k^2}{3-k^2}\\x_1x_2=\frac{-4k^2-3}{3-k^2}\end{cases}$， -----------8 分

直线 AP: $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$， 直线 AQ: $y=\frac{y_2}{x_2-1}(x-1)$，

当 $x=t$ 时，可得 $M(t,\frac{y_1}{x_1-1}(t-1))$，$N(t,\frac{y_2}{x_2-1}(t-1))$， ------------9 分

若 $|\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{FN}|=|\overrightarrow{FM}-\overrightarrow{FN}|$，则 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，

可得 $(t+2,\frac{y_1}{x_1-1}(t-1))\cdot(t+2,\frac{y_2}{x_2-1}(t-1))=0$， ------------10 分

即 $(t+2)^2+\frac{y_1}{x_1-1}\cdot\frac{y_2}{x_2-1}(t-1)^2=0$，

因为 $y_1y_2=k^2(x_1+2)(x_2+2)$
$=k^2[x_1x_2+2(x_1+x_2)+4]$
$=\frac{9k^2}{3-k^2}$，

$(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=\frac{-9k^2}{3-k^2}$，

所以 $(t+2)^2-(t-1)^2=0$，可得 $t=-\frac{1}{2}$，

综上，存在这样的实数 $t=-\frac{1}{2}$ 满足题意. ------------12 分

22.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+1]$， ------------1 分

设 $h(x)=x^2+(a+2)x+1$，$\Delta=a^2+4a$，

当 $-4\leqslant a\leqslant 0$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$h(x)\geqslant 0$，可得 $f'(x)\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增； -------------2 分

当 $a>0$ 或 $a<-4$ 时，$\Delta>0$，设 $h(x)=0$ 的两个根分别为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，

则 $x_1=\frac{-a-2-\sqrt{a^2+4a}}{2}$，$x_2=\frac{-a-2+\sqrt{a^2+4a}}{2}$，

当 $x\in(x_1,x_2)$，$h(x)<0$，可得 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单调递减；

当 $x\in(-\infty,x_1)$ 或 $x\in(x_2,+\infty)$，$h(x)>0$，可得 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 分别在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递增. -------------4 分

综上可知，当 $-4\leqslant a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<-4$ 或 $a>0$ 时，

$f(x)$ 在 $(\frac{-a-2-\sqrt{a^2+4a}}{2},\frac{-a-2+\sqrt{a^2+4a}}{2})$ 上单调递减，

在 $(-\infty,\frac{-a-2-\sqrt{a^2+4a}}{2})$，$(\frac{-a-2+\sqrt{a^2+4a}}{2},+\infty)$ 上单调递增. ------------5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$ 上单调递减，

在 $(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2})$，$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},0)$ 上单调递增， -------------6 分

所以当 $x<0$ 时，$f(x)\leqslant\max\{f(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}),f(0)\}<1$， -------------7 分

而 $f(m)>f(n)>f(z)=1$ 且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
所以 $m>n>z>0$， -------------8 分

令 $g(x)=\ln x-xe^x$，

$g'(x)=\frac{1-(x^2+x)e^x}{x}=\frac{1-f(x)}{x}$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $x\in(z,+\infty)$ 时，$f(x)>f(z)=1$，
所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(z,+\infty)$ 上单调递减，
因为 $m>n>z$，所以 $g(m)<g(n)<g(z)$， -------------10 分

所以 $\ln m-me^m<\ln n-ne^n<\ln z-ze^z$，

所以 $\ln m+\ln z-me^m<\ln n+\ln z-ne^n$，$\ln n+\ln m-ne^n<\ln z+\ln m-ze^z$，

即 $\ln mz-me^m<\ln nz-ne^n$，$\ln mn-ne^n<\ln mz-ze^z$，

所以 $\ln mz+ne^n<\ln nz+me^m$，$\ln mn+ze^z<\ln mz+ne^n$，
所以 $\ln mn+ze^z<\ln mz+ne^n<\ln nz+me^m$. -------------12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索