北京市东城区 2016—2017 学年度第二学期高三综合练习(一)

2017.4

数学(理科)

本试卷共 4 页，共 150 分. 考试时长 120 分钟. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第Ⅰ卷 (选择题 共 40 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x-2<0\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{x|-1<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x<1\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|2<x<3\}$

2. 已知命题 p：$\forall n\in\mathbf{N}, 2^n>\sqrt{n}$，则 $\neg p$ 是

A. $\forall n\in\mathbf{N}, 2^n\leqslant\sqrt{n}$　　B. $\forall n\in\mathbf{N}, 2^n<\sqrt{n}$

C. $\exists n\in\mathbf{N}, 2^n\leqslant\sqrt{n}$　　D. $\exists n\in\mathbf{N}, 2^n>\sqrt{n}$

3. 已知圆的参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，则圆心到直线 $y=x+3$ 的距离为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知 m 是直线，α,β 是两个互相垂直的平面，则“$m\parallel\alpha$”是“$m\perp\beta$”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，则 $(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=$

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

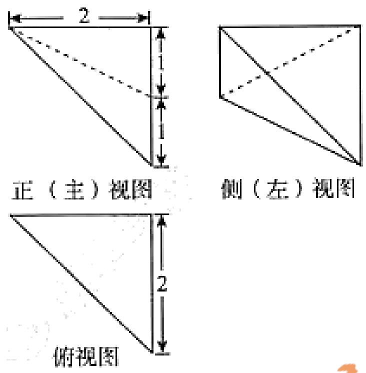
6. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. 1

D. $\frac{4}{3}$



7. 将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度，得到函数 $y=f(x)$ 图象在区间 $[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$ 上单调递减，则 m 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

8. 甲抛掷均匀硬币 2017 次，乙抛掷均匀硬币 2016 次，下列四个随机事件的概率是 0.5 的是

①甲抛出正面次数比乙抛出正面次数多.

②甲抛出反面次数比乙抛出正面次数少.

③甲抛出反面次数比甲抛出正面次数多.

④乙抛出正面次数与乙抛出反面次数一样多.

A. ①②　　B. ①③　　C. ②③　　D. ②④

第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知复数 z 满足 $z(1+i)=2$，则 $|z|=$____.

10. 在 $(x^2+\frac{2}{x^3})^5$ 的展开式中，常数项为____.（用数字作答）

11. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，S_n 为其前 n 项和. 若 $S_3=12$，$a_2+a_4=4$，则 $S_6=$____.

12. 天干地支纪年法，源于中国. 中国自古便有十天干与十二地支. 十天干即：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；十二地支即：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥. 天干地支纪年法是按顺序以一个天干和一个地支相配，排列起来，天干在前，地支在后，天干由“甲”起，地支由“子”起，比如第一年为“甲子”，第二年为“乙丑”，第三年为“丙寅”，…，以此类推. 排列到“癸酉”后，天干回到“甲”重新开始，即“甲戌”，“乙亥”，之后地支回到“子”重新开始，即“丙子”，…，以此类推. 已知 2017 年为丁酉年，那么到新中国成立 100 年时，即 2049 年为____年.

13. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线为等边三角形 OAB 的边 OA，OB 所在直线，直线 AB 过双曲线的焦点，且$|AB|=2$，则 $a=$ ____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<\frac{1}{2},\\-1,\frac{1}{2}\leqslant x<1,\\0,x<0\text{ 或 }x\geqslant 1\end{cases}$ 和 $g(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<1,\\0,x<0\text{ 或 }x\geqslant 1,\end{cases}$

则 $g(2x)=$ ____；

若 $m,n\in\mathbf{Z}$，且 $m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=f(x)$，则 $m+n=$ ____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

15.(本小题共 13 分)

在$\triangle ABC$中，$\angle C=\frac{2\pi}{3}$.

(Ⅰ)若 $c^2=5a^2+ab$，求$\frac{\sin B}{\sin A}$；

(Ⅱ)求 $\sin A\cdot\sin B$ 的最大值.

16.(本小题共 13 分)

近年来共享单车在我国主要城市发展迅速. 目前市场上有多种类型的共享单车，有关部门对其中三种共享单车方式(M 方式、Y 方式、F 方式)进行统计(统计对象年龄在 15～55 岁)，相关数据如表 1，表 2 所示.

三种共享单车方式人群年龄比例(表 1)

年龄分组＼方式	M 方式	Y 方式	F 方式
[15,25)	25%	20%	35%
[25,35)	50%	55%	25%
[35,45)	20%	20%	20%
[45,55]	5%	a%	20%

不同性别选择共享单车种类情况统计(表 2)

使用单车种类数(种)＼性别	男	女
1	20%	50%
2	35%	40%
3	45%	10%

(Ⅰ)根据表 1 估算出使用 Y 共享单车方式人群的平均年龄；

(Ⅱ)若从统计对象中随机选取男女各一人，试估计男性使用共享单车种类数大于女性使用共享单车种类数的概率；

(Ⅲ)现有一个年龄在 25～35 岁之间的共享单车用户，那么他使用 Y 方式出行的概率最大，使用 F 方式出行的概率最小，试问此结论是否正确.(只需写出结论)

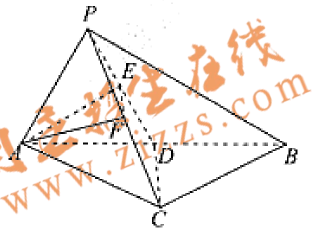
17.（本小题共 14 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，$AP\perp BP$，$AC\perp BC$，$\angle PAB=60^\circ$，$\angle ABC=45^\circ$，D 是 AB 中点，E，F 分别为 PD，PC 的中点.

（Ⅰ）求证：$AE\perp$ 平面 PCD；

（Ⅱ）求二面角 $B-PA-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）在棱 PB 上是否存在点 M，使得 $CM//$ 平面 AEF？若存在，求 $\dfrac{PM}{PB}$ 的值；若不存在，说明理由.



18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{x}-mx(m\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $m=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）设 $0<a<b$，求证：$\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}<\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $(0,\sqrt{2})$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 A，B 是椭圆 C 的左，右顶点，P 为椭圆上异于 A，B 的一点，以原点 O 为端点分别作与直线 AP 和 BP 平行的射线，交椭圆 C 于 M，N 两点，求证：$\triangle OMN$ 的面积为定值.

20.（本小题共 13 分）

已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$a_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，并且 $n\geq2$. 定义 $T(A)=\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}|a_j-a_i|$（例如：$\sum\limits_{1\leq i<j\leq 3}|a_j-a_i|=|a_2-a_1|+|a_3-a_1|+|a_3-a_2|$）.

（Ⅰ）若 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，$M=\{1,2,3,4,5\}$，集合 A 的子集 N 满足：$N\neq M$，且 $T(M)=T(N)$，求出一个符合此条件的 N；

（Ⅱ）对于任意给定的常数 C 以及给定的集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，求证：存在集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，使得 $T(B)=T(A)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=C$.

（Ⅲ）已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2m}\}$ 满足：$a_i<a_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,2m-1$，$m\geq2$，$a_1=a$，$a_{2m}=b$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$ 为给定的常数，求 $T(A)$ 的取值范围.

北京市东城区高三年级第一次综合练习解析

学而思高考研究中心——潘玥、哈茹雪、林原田、詹昊凯、马佛青、
吴迪、苏泊文、宫超、李海玉、武洪姣、
曲丹、张剑、季晓蕊、杜鹏、韩晓东、王嘉庆

1．A

【解析】$A=\{x|-1<x<2\}$，所以$A\cup B=\{x|-1<x<3\}$.

2．C

【解析】命题$\neg p$为$\exists n\in \mathbf{N}, 2^n\leqslant \sqrt{n}$.

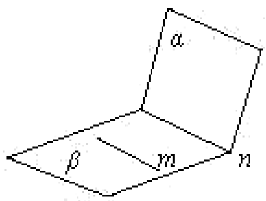
3．B

【解析】由题意易知圆的方程为$(x+1)^2+y^2=2$，即圆心坐标为$(-1,0)$，所以圆心到直线$y=x+3$的距离为$d=\dfrac{|-1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

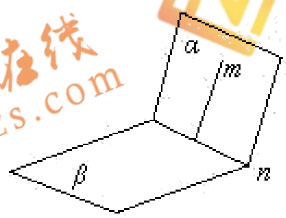
4．D

【解析】根据题意可知$\alpha\perp\beta$，记$n=\alpha\cap\beta$，

充分性：如下图，取$m\subset\beta$且$m /\!/ n$，此时$m /\!/ \alpha$，而$m\perp\beta$不成立，所以充分性不成立；



必要性：如下图，取$m\subset\alpha$，$m\perp n$，此时$m\perp\beta$，而$m /\!/ \alpha$不成立，所以必要性不成立.



综上，“$m /\!/ \alpha$”是“$m\perp\beta$”的既不充分又不必要条件.

5．B

【解析】$\because 2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$，$\therefore \vec{b}=-2\vec{a}$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(-2\vec{a})=-2|\vec{a}|^2=-2$，

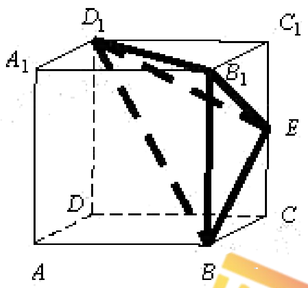
$\therefore |\vec{a}|^2=1, |\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2=4$，

$\therefore (3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=3|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=3$

6．D

【解析】 如图所示，该三棱锥D_1-B_1BE可由边长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$截得，其中E为CC_1中点，所以三棱锥的体积为：

$$V_{D_1-B_1BE}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle B_1BE}\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}$$



7．C

【解析】根据题意易知，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，

函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$向左平移$m$个单位长度之后得到函数$f(x)$，

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left[k\pi+\frac{\pi}{6}-m,k\pi+\frac{2\pi}{3}-m\right](k\in\mathbf{Z})$

要求使得$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$单调递减的$m$的最小值；

只需取$k=0$时,此时$m=\frac{\pi}{4}$为最小值且满足题意.

8．B

【解析】本题考察统计过程的直观感受，考虑正反面次数的指标为期望．考虑到甲乙两人都掷出2016枚硬币时，甲乙两人得到的正反面次数的期望都是1008．当甲掷出第2017枚硬币时，有0.5的概率得到正面，0.5的概率得到反面．即甲有0.5的概率得到的正面次数期望为1009，比乙的1008多，①正确；有0.5的概率得到正面的期望为1009比反面期望1008多，③正确．

9．$\sqrt{2}$

【解析】$\because z=\frac{2}{1+i}=1-i$，$\therefore |z|=\sqrt{2}$

10．40

【解析】根据二项式定理可得第$r+1$项为$C_5^r\cdot\left(x^2\right)^{5-r}\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-5r}$，所以当$r=2$时

常数项为$C_5^2\cdot 2^2=40$

11．$S_6=6$

【解析】$\because S_3=12$，$\therefore a_2=4$，又$\because a_2+a_4=4$，$\therefore a_3=2$，$\therefore d=-2$，$a_4=0$，

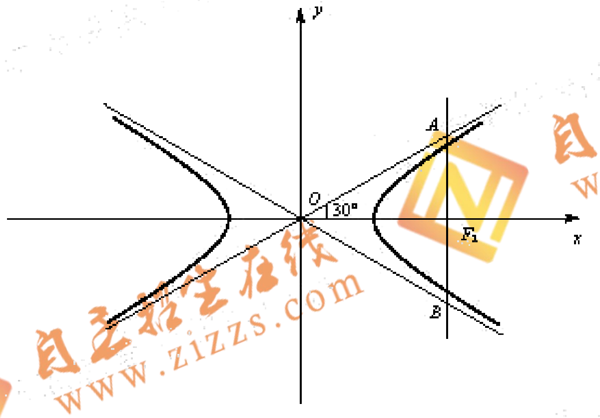
$\therefore S_6=3\left(a_3+a_4\right)=6$

12．己巳

【解析】由题意可知 2017 年到 2049 年需经历 32 年，天干的周期为 10 年，所以 32 年后即 2049 年的天干为己；地支的周期为 12 年，所以 32 年后即 2049 年的地支为巳，所以 2049 年为己巳年

13．$\frac{3}{2}$

【解析】由题可知图为



$\because \triangle OAB$ 为等边三角形且 $|AB|=2$，$\therefore |AF_2|=1$，$\angle AOF_2=30$，$\therefore c=\sqrt{3}$，

又$\because$双曲线的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，$\therefore \frac{b}{a}=\tan 30^\circ$，即 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，又$\because a^2+b^2=c^2$，

$\therefore a=\frac{3}{2}$

14．(1) $g(2x)=\begin{cases}1,0\leqslant x<\frac{1}{2}\\0,x<0或x\geqslant\frac{1}{2}\end{cases}$；(2)4

【解析】(2) $m\cdot g(n\cdot x)=\begin{cases}m,0\leqslant nx<1\\0,nx<0或nx\geqslant1\end{cases}$，$m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=f(x)$

①显然 m,n 都不为 0；

②若 $n<0$，$m\cdot g(n\cdot x)=\begin{cases}m,\frac{1}{n}<x\leqslant0\\0,x>0或x\leqslant\frac{1}{n}\end{cases}$

$0<x<\frac{1}{2}$ 时，$m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=0-1=-1$，$f(x)=1$，不符合题意；

③若 $n>0$，$m\cdot g(n\cdot x)=\begin{cases}m,0\leqslant x<\frac{1}{n}\\0,x<0或x\geqslant\frac{1}{n}\end{cases}$

$0\leqslant x<\frac{1}{2}$时，若$m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=m-1=f(x)=1$，只能$m=2$，$\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\leqslant x<1$时，若$m\cdot g(n\cdot x)-g(x)=0-1=f(x)=-1$，只能$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}$

综合两种情况知$m=2$，$n=2$．并由检验知$2g(2x)-g(x)=f(x)$

所以$m+n=4$

15.

【解析】(1) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}=a^2+b^2+ab$

又 $c^2=5a^2+ab$

$\therefore b^2=4a^2$

又$\because a>0,b>0$

$\therefore b=2a$

$\therefore \frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}=2$

(2) $\sin A\cdot\sin B=\sin A\cdot\sin(\pi-\frac{2\pi}{3}-A)$

$=\sin A\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cdot\cos A-\frac{1}{2}\sin^2 A$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\frac{1}{2}\times\frac{1-\cos 2A}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{4}\cos 2A-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin(2A+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$

$\because 0<A<\frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

$\therefore \frac{1}{2}<\sin(2A+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$

$\therefore 0<\sin A\cdot\sin B\leqslant\frac{1}{4}$

即$\sin A\cdot\sin B$的最大值为$\frac{1}{4}$

16.

【解析】(1)由已知数据得 $a=5$

平均年龄为：$20\times0.2+30\times0.55+40\times0.2+50\times0.05=31$

(2)记：A_i 事件为男性使用共享单车种类数，$i=1,2,3$

则 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.35$，$P(A_3)=0.45$

记：B_i 事件为女性使用共享单车种类数，$i=1,2,3$

则 $P(B_1)=0.5$，$P(B_2)=0.4$，$P(B_3)=0.1$

则男性使用共享单车种类数大于女性使用共享单车种类数的概率为：

$$\begin{aligned}P(A_2B_1+A_3B_1+A_3B_2)&=P(A_2B_1)+P(A_3B_1)+P(A_3B_2)\\&=P(A_2)\cdot P(B_1)+P(A_3)\cdot P(B_1)+P(A_3)\cdot P(B_2)\\&=0.35\times0.5+0.45\times0.5+0.45\times0.4\\&=0.58\end{aligned}$$

(3)不正确

17.

【解析】(1)$\because CA\perp CB$，$\angle ABC=45$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形

又 $\because D$ 是 AB 的中点，$\therefore CD\perp AB$

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$CD\subset$ 平面 ABC

$\therefore CD\perp$ 平面 PAB，$\because AE\subset$ 平面 PAB，$\therefore CD\perp AE$

又 $\because PA\perp PB$，$\angle PAB=60$，D 为 AB 的中点，

$\therefore \triangle APD$ 是等边三角形，又 E 为 PD 的中点，

$\therefore AE\perp PD$

$\because PD\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，$PD\cap CD=D$，

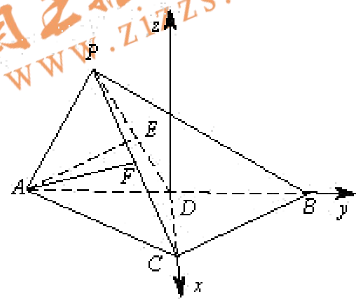
$\therefore AE\perp$ 平面 PCD

(2)如图建立空间直角坐标系，设 $AB=2a$，

则 $A(0,-a,0)$，$C(a,0,0)$，$P\left(0,-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

设平面 PAB 的法向量 $n_1=(x,y,z)$，平面 PAB 的法向量 $n_2=(1,0,0)$

$\overline{PA}=\left(0,-\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$，$\overline{PC}=\left(a,\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$



$$\begin{cases}-\frac{a}{2}y-\frac{\sqrt{3}a}{2}z=0\\ax+\frac{a}{2}y-\frac{\sqrt{3}a}{2}z=0\end{cases}$$ 令 $z=\sqrt{3}$，$\overline{n_1}=(3,-3,\sqrt{3})$

$\cos\langle n_1\cdot n_2\rangle=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{3}{1\times\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore$ 二面角 $B-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

(3) $A(0,-a,0)$，$B(0,a,0)$，$E\left(0,-\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$，$F\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$，

$P\left(0,-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$\overline{AE}\left(0,\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$，$\overline{AF}\left(\frac{a}{2},\frac{3a}{4},\frac{\sqrt{3}a}{4}\right)$，$\overline{PB}=\left(0,\frac{3a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$

设平面 AEF 的法向量是 $n=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\frac{3a}{4}y+\frac{\sqrt{3}a}{4}z=0\\ \frac{a}{2}x+\frac{3a}{4}y+\frac{\sqrt{3}a}{4}z=0\end{cases}$$ 令 $y=1$，则 $\vec{n}=(0,1,-\sqrt{3})$

设 $\vec{PM}=\lambda\vec{PB}$，（$0\leqslant\lambda\leqslant1$），$\vec{PM}=\left(0,\frac{3a}{2}\lambda,-\frac{\sqrt{3}a}{2}\lambda\right)$

$\therefore \overline{CM}=\overline{CP}+\overline{PM}=\left(-a,\frac{3a}{2}\lambda-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}\lambda\right)$

$\because CM$ // 平面 AEF，$\therefore CM\perp\vec{n}$

$\vec{CM}\cdot\vec{n}=\frac{3a}{2}\lambda-\frac{a}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}-\frac{\sqrt{3}a}{2}\lambda\right)=0$，解得 $\lambda=\frac{2}{3}$

所以棱 PB 上存在点 M，使得 CM // 平面 AEF，$\frac{PM}{PB}=\frac{2}{3}$.

18.

【解析】(1) $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}+x$，

$f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+1$，$f'(1)=2=k$，$f(1)=2$，$\therefore$ 切点为 $(1,2)$，则切线方程为 $y-2x=0$

(2) 由原题可知 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-m\leqslant0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$m\geqslant\frac{2x-1}{x^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$，令 $t=\frac{1}{x}$ 即 $m\geqslant2t-t^2$ 当 $t\in(0,+\infty)$ 恒成立，即 m 大于等于函数 $h(t)=-t^2+2t$ 的在 $t\in(0,+\infty)$ 的最大值，又因为当 $h(t)\leqslant h(1)$，$\therefore m\geqslant1$

(3) $\because 0<a<b$，$\therefore b-a>0$，

若证 $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$，

即证 $\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}}$

即证 $\ln\frac{b}{a}<\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

令 $\sqrt{\frac{b}{a}}=t$，$\because b>a>0$，$\therefore t>1$

即证 $\ln t^2<t-\frac{1}{t}$，$g(t)=\ln t^2-t+\frac{1}{t}<0$ 在 $t>1$ 上恒成立.

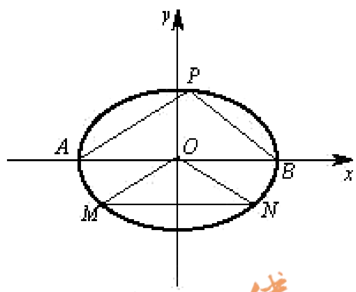
$g'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=\frac{-(t-1)^2}{t^2}<0$，由此函数 $g(t)$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(t)\leqslant g(1)=0$ 原式得证.

19.

【解析】(1) 由椭圆过$\left(0,\sqrt{2}\right)$可知$b=\sqrt{2}$，

由$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2-c^2=b^2=2$解得$a^2=4$，$c^2=2$

因此椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$



(2)设$P\left(x_0,y_0\right)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$

直线MN的方程为$y=kx+m$上，

由椭圆方程$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$可知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$

$$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=\frac{y_0^2}{x_0^2-4}\quad①$$

$\because P$在椭圆上

$$\therefore \frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1,\quad y_0^2=2-\frac{x_0^2}{2}\quad②$$

把②式代入①式得$k_{PA}\cdot k_{PB}=\dfrac{2-\dfrac{x_0^2}{2}}{x_0^2-4}=-\dfrac{1}{2}$

$\because PA\,/\!/\,OM$，$PB\,/\!/\,ON$

$$\therefore k_{OM}\cdot k_{ON}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{1}{2},\quad y_1y_2=-\frac{1}{2}x_1x_2\quad③$$

联立直线MN与椭圆方程

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$$，整理得$\left(2k^2+1\right)x^2+4kmx+2m^2-4=0$

则$\Delta=16k^2m^2-4\left(2k^2+1\right)\left(2m^2-4\right)=8\left(4k^2-m^2+2\right)>0$

$$x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1},\quad x_1x_2=\frac{2m^2-4}{2k^2+1}$$

$$\begin{aligned}y_1y_2&=\left(kx_1+m\right)\left(kx_2+m\right)\\&=k^2x_1x_2+km\left(x_1+x_2\right)+m^2\\&=k^2\cdot\frac{2m^2-4}{2k^2+1}+km\cdot\frac{-4km}{2k^2+1}+m^2\\&=\frac{m^2-4k^2}{2k^2+1}\end{aligned}$$

由③得$\dfrac{m^2-4k^2}{2k^2+1}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2m^2-4}{2k^2+1}$，整理得$m^2=2k^2+1$ ④

把④代入判别式得$\Delta=8\left(2k^2+1\right)>0$，满足题意

$$\begin{aligned}|MN|&=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}\\&=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-4}{2k^2+1}}\\&=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{8\left(4k^2-m^2+2\right)}}{2k^2+1}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}\end{aligned}$$

O 到直线 MN 距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\sqrt{2k^2+1}}{\sqrt{1+k^2}}$

$\triangle OMN$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{2k^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{2k^2+1}}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{2}$

因此 $\triangle OMN$ 的面积为定值

20.

【解析】(1) $T(M)=5\times4+4\times2-2\times2-1\times4=20$，取 $N=\{6,7,8,9,10\}$．

(2) 不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，则

$T(A)=(n-1)(a_n-a_1)+(n-3)(a_{n-1}-a_2)+(n-5)(a_{n-2}-a_3)+\cdots$

令 $b_i=a_i+x$，其中 $x=\frac{1}{n}(C-a_1-a_2-\cdots-a_n)$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=C$．

又 $b_1<b_2<\cdots<b_n$，且 $b_n-b_1=a_n-a_1$，$b_{n-1}-b_2=a_{n-1}-a_2$，$b_{n-2}-b_3=a_{n-2}-a_3$，$\cdots$

所以 $T(B)=(n-1)(b_n-b_1)+(n-3)(b_{n-1}-b_2)+(n-5)(b_{n-2}-b_3)+\cdots$

$=(n-1)(a_n-a_1)+(n-3)(a_{n-1}-a_2)+(n-5)(a_{n-2}-a_3)+\cdots$

$=T(A)$

因此，集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$ 满足要求．

(3) $T(A)=\sum\limits_{j=0}^{m-1}(2m-2j-1)(a_{2m-j}-a_{j+1})$

$=(2m-1)(a_{2m}-a_1)+(2m-3)(a_{2m-1}-a_2)+\cdots+1\cdot(a_{m+1}-a_m)$，

因为 $a_{2m}-a_1=b-a$，$a_{2m-j}-a_{j+1}<b-a$，$j=1,2,\cdots,m-1$，

所以，$T(A)<\sum\limits_{j=0}^{m-1}(2m-2j-1)(b-a)=m^2(b-a)$，当 $a_2<a_3<\cdots<a_m$ 都趋近于 a，

$a_{m+1}<a_{m+2}<\cdots<a_{2m-1}$ 都趋近于 b 时，$T(A)$ 可以无限趋近于 $m^2(b-a)$．

另一方面，因为 $a_{2m}-a_1=b-a$，$a_{2m-j}-a_{j+1}>0$，$j=1,2,\cdots,m-1$，

所以 $T(A)>(2m-1)(b-a)$

当 $a_2<a_3<\cdots<a_{2m-1}$ 都趋近于相等时，$T(A)$ 趋近于 $(2m-1)(b-a)$．

综上，$(2m-1)(b-a)<T(A)<m^2(b-a)$．

扫描二维码，关注自主招生官方微信！

查看更多自主招生相关资讯！