高三数学考试参考答案(理科)

1. B 【解析】本题考查集合的交集,考查数学运算的核心素养.

由题意可得 $A=\{x|-2<x<3\}$,$B=\{x|x\leqslant 1\}$,则 $A\cap B=\{x|-2<x\leqslant 1\}$.

2. C 【解析】本题考查复数的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $z=\frac{1-4i^3}{1-i}=\frac{1+4i}{1-i}=\frac{(1+4i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-3+5i}{2}$,所以复数 z 的实部与虚部分别是 $-\frac{3}{2}$,$\frac{5}{2}$,则复数 z 的实部与虚部之和为 $-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=1$.

3. A 【解析】本题考查函数的奇偶性,考查数学抽象的核心素养.

由题意可得 $f(x+1)=2(x+1)^2+a(x+1)+2=2x^2+(a+4)x+a+4$. 因为 $f(x+1)$ 是偶函数,所以 $a+4=0$,解得 $a=-4$.

4. D 【解析】本题考查抽样方法,考查数据分析的核心素养.

由题意可知得到的样本编号依次为 12,06,01,16,19,10,07,44,39,38,则得到的第 8 个样本编号是 44.

5. C 【解析】本题考查等比数列的性质,考查数学运算的核心素养.

因为 $S_3=1$,$S_9=512$,所以 $a_1a_2a_3=a_2^3=1$,$a_1a_2a_3\cdots a_9=a_5^9=512$,解得 $a_2=1$,$a_5=2$,则 $q^3=\frac{a_5}{a_2}=2$,故 $a_{11}=a_2q^9=2^3=8$.

6. D 【解析】本题考查二项式定理,考查数学运算的核心素养.

$(\frac{1}{x}-2)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(\frac{1}{x})^{5-r}\cdot(-2)^r=(-2)^r\cdot C_5^r\cdot x^{r-5}$. 令 $r-5=0$,得 $r=5$,则 $T_6=(-2)^5\times C_5^5=-32$. 令 $r-5=-1$,得 $r=4$,则 $T_5=(-2)^4\times C_5^4\cdot x^{-1}=80x^{-1}$. 故 $(x-1)(\frac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中的常数项是 $80+32=112$.

7. A 【解析】本题考查椭圆,考查直观想象的核心素养.

设 $P(m,n)$,则 $\begin{cases}m^2+n^2=5,\\ \frac{m^2}{8}+\frac{n^2}{2}=1,\end{cases}$ 解得 $|n|=1$,故 $\triangle PAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$.

8. A 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查数形结合的数学思想.

由题意可得 $f(x)=\cos 2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$. 因为 $x\in[0,\pi]$,所以 $2\omega x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},2\pi\omega+\frac{\pi}{6}]$,则 $3\pi\leqslant 2\pi\omega+\frac{\pi}{6}<4\pi$,解得 $\frac{17}{12}\leqslant\omega<\frac{23}{12}$.

9. B 【解析】本题考查等差数列与不等式,考查化归与转化的数学思想.

因为 $a_{n+1}=(1+\frac{1}{n+1})a_n$,所以 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n+1}$,所以数列 $\{\frac{a_n}{n+1}\}$ 是常数列,则 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_3}{3+1}=1$,从而 $a_n=n+1$,故 $S_n=\frac{n^2+3n}{2}$. 因为 $2S_n+12\geqslant ka_n$ 恒成立,所以 $n^2+3n+12\geqslant k(n+1)$ 恒成立,

即 $k\leqslant\frac{n^2+3n+12}{n+1}$恒成立. 设 $t=n+1$,则 $n=t-1$,从而$\frac{n^2+3n+12}{n+1}=\frac{(t-1)^2+3(t-1)+12}{t}$ $=t+\frac{10}{t}+1$. 当 $t=3$ 时,$t+\frac{10}{t}+1=\frac{22}{3}$,当 $t=4$ 时,$t+\frac{10}{t}+1=\frac{15}{2}$. 因为$\frac{22}{3}<\frac{15}{2}$,所以 $t+\frac{10}{t}+1$ 的最小值是$\frac{22}{3}$,即 $k\leqslant\frac{22}{3}$.

10. C 【解析】本题考查双曲线的离心率,考查直观想象的核心素养.

由题意可知$\angle NF_1O=60^\circ$,$\angle ONF_1=90^\circ$,$|OF_1|=c$,则$|NF_1|=\frac{1}{2}c$. 因为$\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{NF_1}$,所以$|MN|=\frac{5}{2}c$,所以$|MF_1|=3c$,则$|MF_2|=3c-2a$. 在$\triangle MF_1F_2$ 中,由余弦定理可得$|MF_2|^2=|MF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|MF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\angle MF_1F_2$,即$(3c-2a)^2=(3c)^2+(2c)^2-2\times3c\times2c\times\frac{1}{2}$,整理得 $c^2-6ac+2a^2=0$,即 $e^2-6e+2=0$,解得 $e=3+\sqrt{7}$.

11. B 【解析】本题考查三棱锥的外接球,考查直观想象和数学建模的核心素养.

设 $AB=x$,则 $PA=6-x$,故三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot PA=\frac{1}{6}x^2(6-x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2$. 设 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2(0<x<6)$,则 $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x(0<x<6)$. 由 $f'(x)>0$,得 $0<x<4$,由 $f'(x)<0$,得 $4<x<6$,则 $f(x)$在$(0,4)$上单调递增,在$(4,6)$上单调递减,从而 $f(x)_{\max}=f(4)=\frac{16}{3}$,即三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值是$\frac{16}{3}$,此时 $x=4$,即 $AB=AC=4$,$PA=2$. 因为 $PA\perp$平面 ABC,$AB\perp AC$,所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R=\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{2}})^2+(\frac{2}{2})^2}=3$,则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的体积为$\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$.

12. D 【解析】本题考查导数的应用,考查函数与方程的数学思想.

设 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x$,则 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\geqslant0$,从而 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,故 $f(0.1)=\mathrm{e}^{0.1}-\mathrm{e}^{-0.1}-0.2>f(0)=0$,即 $a>c$. 设 $g(x)=2x-2\ln(1+x)$,则 $g'(x)=2-\frac{2}{x+1}=\frac{2x}{x+1}>0$,从而 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,故 $g(0.1)=0.2-2\ln 1.1=0.2-\ln 1.21>g(0)=0$,即 $c>b$. 综上,$b<c<a$.

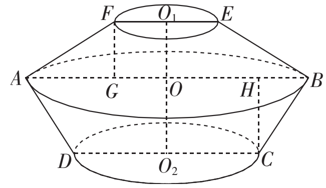
13. $-\frac{1}{4}$ 【解析】本题考查平面向量,考查数学运算的核心素养.

设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为θ,因为$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$,所以 $4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=6$. 因为$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$,所以 $4-4\cos\theta+1=6$,所以 $\cos\theta=-\frac{1}{4}$.

14. 8.75 【解析】本题考查随机变量的期望,考查数据分析的核心素养.

由题意可得该销售商销售每件零件获利的期望是 $10\times0.95-15\times0.05=8.75$ 元,则该销售商销售该零件 10000 件,获利的期望为 $8.75\times10000=87500$ 元,即8.75 万元.

15. $(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ 【解析】本题考查数学文化与立体几何,考查直观想象的核心素养.



如图,作 $FG\perp AB$,垂足为 G,作 $CH\perp AB$,垂足为 H,由题意可得 $O_1F=4$,$OA=10$,$O_2C=6$,则 $AG=6$,$BH=4$. 由题意可知 $FG:CH=3:4$,则 $FG=6$,$CH=8$,从而 $AF=6\sqrt{2}$,$BC=4\sqrt{5}$,故该汝窑双耳罐的侧面积为 $\pi\cdot AF\cdot(O_1F+OA)+\pi\cdot BC\cdot(O_2C+OA)=(84\sqrt{2}+64\sqrt{5})\pi$ 平方厘米.

16. 55 【解析】本题考查函数的求值,考查逻辑推理的核心素养.

因为 $f(f(n))=3n$,所以 $f(f(1))=3$.

因为 $x\in\mathbf{N}$,$f(x)\in\mathbf{N}$,且 $f(x)$ 单调递增,所以 $f(1)=2$,所以 $f(f(1))=f(2)=3$.

因为 $f(f(2))=f(3)=6$,所以 $f(f(3))=f(6)=9$,于是 $f(4)=7$,$f(5)=8$.

因为 $f(f(4))=f(7)=12$,所以 $f(f(7))=f(12)=21$,

因为 $f(f(6))=f(9)=18$,所以 $f(10)=19$,$f(11)=20$.

因为 $f(f(9))=f(18)=27$,$f(f(10))=f(19)=30$,

所以 $f(f(18))=f(27)=54$,$f(f(19))=f(30)=57$,所以 $f(28)=55$,$f(29)=56$.

17. 解:(1)年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的非"编织巧手"有 5 人,

年龄在 40 周岁以下的"编织巧手"有 6 人.

列联表如下:

	"编织巧手"	非"编织巧手"	总计
年龄≥40 岁	19	5	24
年龄<40 岁	6	10	16
总计	25	15	40

…………………………………………………………………………………… 3 分

由题中数据可得 $K^2=\dfrac{40\times(19\times10-6\times5)^2}{24\times16\times25\times15}=\dfrac{64}{9}\approx7.111$, ……………………… 5 分

因为 $7.111>6.635$,所以有 99%的把握认为是否是"编织巧手"与年龄有关. ………… 6 分

(2)由题意可得这 6 人中年龄在 40 周岁以上(含 40 周岁)的有 2 人,年龄在 40 周岁以下的有 4 人. ………………………………………………………………………… 7 分

从这 6 人中随机抽取 2 人的情况有 $C_6^2=15$ 种, ………………………………… 9 分

其中符合条件的情况有 $C_4^1\cdot C_2^1=8$ 种, ……………………………………… 11 分

故所求概率 $P=\dfrac{8}{15}$. …………………………………………………………… 12 分

评分细则:

(1)在第(1)问中,直接补充完整 2×2 列联表,没有计算过程,只要答案正确,不扣分;

(2)在第(2)问中,算出 40 周岁以上(含 40 周岁)和 40 周岁以下的人数,得 2 分,求出总的基本事件和符合条件的基本事件的个数,各得 2 分;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

18. 解:(1)因为 $5\cos 2B-14\cos B=7$,所以 $5(2\cos^2B-1)-14\cos B-7=0$, ······ 1 分

所以 $5\cos^2B-7\cos B-6=0$,即 $(5\cos B+3)(\cos B-2)=0$, ······ 3 分

解得 $\cos B=-\frac{3}{5}$. ······ 4 分

因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\frac{4}{5}$. ······ 6 分

(2)由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=41$,则 $b=\sqrt{41}$. ······ 8 分

设$\triangle ABC$的边 AC 上的高为 h.

因为$\triangle ABC$的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$,所以 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{5\times2\times\frac{4}{5}}{\sqrt{41}}=\frac{8\sqrt{41}}{41}$. ······ 10 分

因为 B 是钝角,所以当 $BD\perp AC$ 时,垂足在边 AC 上,即 BD 的最小值是$\frac{8\sqrt{41}}{41}$. ······ 12 分

评分细则:

(1)在第(1)问中,求出 $\cos B=-\frac{3}{5}$,得 4 分,没有说明 $0<B<\pi$,不扣分;

(2)在第(2)问中,求出$\triangle ABC$的边 AC 上的高 $h=\frac{8\sqrt{41}}{41}$,累计得 10 分,没有说明 BD 的最小值是边 AC 上的高,直接得出 BD 的最小值为$\frac{8\sqrt{41}}{41}$,扣 1 分;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

19. (1)证明:取 AD 的中点 H,连接 EH,FH.

因为 F,H 分别是棱 PA,AD 的中点,所以 $HF/\!/PD$. ······ 1 分

因为 $PD\subset$平面 PCD,$HF\not\subset$平面 PCD,所以 $HF/\!/$平面 PCD. ······ 2 分

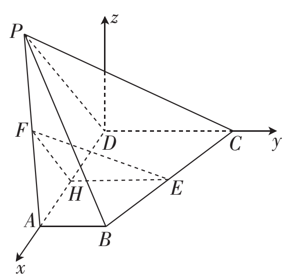
因为 E,H 分别是棱 BC,AD 的中点,所以 $HE/\!/CD$. ······ 3 分

因为 $CD\subset$平面 PCD,$HE\not\subset$平面 PCD,所以 $HE/\!/$平面 PCD. ······ 4 分

因为 HE,$HF\subset$平面 HEF,且 $HE\cap HF=H$,所以平面 $HEF/\!/$平面 PCD. ······ 5 分

因为 $EF\subset$平面 HEF,所以 $EF/\!/$平面 PCD. ······ 6 分

(2)解:以 D 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$的方向为 x,y 轴的正方向,垂直平面 $ABCD$ 向上的方向为 z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=1$,则 $AD=CD=PD=2$,$PC=2\sqrt{3}$.

由余弦定理可得 $\cos\angle PDC=\frac{4+4-12}{2\times2\times2}=-\frac{1}{2}$,则$\angle PDC=120°$,

从而 $A(2,0,0)$,$D(0,0,0)$,$P(0,-1,\sqrt{3})$,$E(1,\frac{3}{2},0)$,$F(1,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$,

故$\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(0,-2,\frac{\sqrt{3}}{2})$. ………………………………… 8分

设平面PAD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=-y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$令$y=\sqrt{3}$，得$\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},1)$. ………………………………… 10分

设直线EF与平面PAD所成的角为θ，

则$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{EF}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{4+\frac{3}{4}}}=\frac{3\sqrt{57}}{38}$，

即直线EF与平面PAD所成角的正弦值为$\frac{3\sqrt{57}}{38}$. ………………………………… 12分

评分细则：

(1)在第(1)问中，也可以连接AE，并延长交CD于M，连接PM，易证EF是$\triangle APM$的中位线，从而得到$EF/\!/PM$，进而证出$EF/\!/$平面PCD；

(2)在第(2)问中，也可以先求出EF的长，再通过等体积法求出点E到平面PAD的距离d，从而求出直线EF与平面PAD所成角的正弦值为$\frac{d}{EF}$；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

20. 解：(1)由题意可得$|AB|=|BF|$，即点B到点F的距离等于点B到直线l_1的距离. ………………………………… 1分

因为$|EF|=4$，所以l_1的方程为$x=-2$，$F(2,0)$， ………………………………… 2分

则点B的轨迹C是以F为焦点，直线l_1：$x=-2$为准线的抛物线， ………………… 3分

故点B的轨迹C的方程为$y^2=8x$. ………………………………… 4分

(2)由题意可知直线l的斜率不为0，则设直线l：$x=my+n$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=8x,\end{cases}$整理得$y^2-8my-8n=0$，

则$\Delta=64m^2+32n>0$，从而$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8n$. ………………………………… 5分

因为以线段MN为直径的圆恒过点P，所以$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，

即$(x_1-2)(x_2-2)+(y_1-4)(y_2-4)=x_1x_2-2(x_1+x_2)+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$. ………………………………… 6分

因为$x_1=\frac{y_1^2}{8}$，$x_2=\frac{y_2^2}{8}$，所以$\frac{(y_1y_2)^2}{64}-\frac{y_1^2+y_2^2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$，

即$\frac{(y_1y_2)^2}{64}-\frac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{4}+y_1y_2-4(y_1+y_2)+20=0$， ………………… 8分

所以$n^2-16m^2-12n-32m+20=0$，即$n^2-12n+36=16m^2+32m+16$，即$(n-6)^2=16(m+1)^2$，所以$n-6=\pm4(m+1)$，即$n=4m+10$或$n=-4m+2$. ………………… 10分

因为直线 l 不经过点 P，所以 $n\neq-4m+2$，则直线 $l:x=my+4m+10$ 满足题意，…… 11 分

故直线 l 过定点 $(10,-4)$. …………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，也可以设 $B(x,y)$，再由 $|AB|=|BF|$，得到 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|x+2|$，从而得到点 B 的轨迹 C 的方程；

(2)在第(2)问中，也可以设直线 $l:y=kx+m$，得到直线 l 过定点 $(10,-4)$，再验证当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 也过定点 $(10,-4)$，从而得出直线 l 过定点 $(10,-4)$，若直线方程用斜截式表示，没有考虑斜率不存在的情况，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

21. 解：(1)由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-ax=\dfrac{-ax^2-ax+1}{x+1}$.

…………………………………………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)=0$，则 $-ax^2-ax+1=0$，$\Delta=a^2+4a=a(a+4)$.

当 $\Delta\leqslant 0$，即 $-4\leqslant a<0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. …………………… 2 分

当 $\Delta>0$，即 $a>0$ 或 $a<-4$ 时，$f'(x)=0$ 有两个根 $x_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$，$x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{a^2+4a}}{2a}$.

若 $a>0$，$x_1<-1$，$x_2>0$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减； ………………………………………… 3 分

若 $a<-4$，$x_1>x_2\in(-1,+\infty)$，则当 $x\in(-1,x_2)$ 或 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. ………………………………… 4 分

综上，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减；当 $-4\leqslant a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增；当 $a<-4$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,x_2)$ 和 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，在 (x_2,x_1) 上单调递减. ………………………………………………………………… 5 分

(2)对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $f'(x)\leqslant g(x)$ 等价于对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$. 设 $h(x)=2axe^x-\sin x$，则 $h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$. …………………… 6 分

若 $a<0$，当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 时，$\cos x\in[0,1]$，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $a<0$ 不符合题意. ……… 7 分

当 $a>0$ 时，设 $m(x)=h'(x)=2a(x+1)e^x-\cos x$，则 $m'(x)=2a(x+2)e^x+\sin x$，

当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x\geqslant 0$，所以 $m'(x)>0$，则 $m(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，即 $h'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，且 $h'(0)=2a-1$. ………………………………………………………… 8 分

若 $0<a<\dfrac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1<0$，$h'(\dfrac{\pi}{2})=2a(\dfrac{\pi}{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}}>0$，则存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使得 $h'(x_0)=0$. 当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $[0,x_0)$ 上单调递减，则 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant 0$ 不恒成立，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 不符合题意. …………………… 9 分

若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $h'(0)=2a-1\geqslant0$，$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即对任意的 $x\in[0,\pi]$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 恒成立；

当 $x\in(\pi,+\infty)$时，$h(x)=2axe^x-\sin x\geqslant2a\pi e^\pi-1\geqslant\pi e^\pi-1>0$，即对任意的 $x\in(\pi,+\infty)$，不等式 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 符合题意. ………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为$[\frac{1}{2},+\infty)$. ……………………………………………………………… 12 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，只要分类讨论情况正确，没有把最后结果写在一起，不扣分；

(2)在第(2)问中，将不等式转化为对任意的 $x\in[0,+\infty)$，都有 $2axe^x-\sin x\geqslant0$ 并求导正确，得 1 分，讨论出 a 的取值范围，累计得 11 分，漏掉最后一步，扣 1 分；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

22. 解：(1)由$\begin{cases}x=2+4\cos\alpha,\\ y=4\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)，得$(x-2)^2+y^2=16$，即 $x^2+y^2-4x-12=0$，

则曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x-12=0$. ……………………………………………… 2 分

由 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-3=0$，得 $x-y-3=0$，

则直线 l 的普通方程为 $x-y-3=0$. ………………………………………………………… 4 分

(2)由题意可得直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=-3+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$($t$ 为参数). ………………………… 5 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C 的直角坐标方程，整理得 $t^2-5\sqrt{2}t-3=0$. ………… 6 分

设 A,B,M 对应的参数分别为 t_1,t_2,t，则 $t_1+t_2=5\sqrt{2}$，$t_1t_2=-3$，从而 $t=\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，…
……………………………………………………………………………………… 8 分

故$\frac{|PM|}{|PA|+|PB|}=\frac{\frac{t_1+t_2}{2}}{|t_1|+|t_2|}=\frac{t_1+t_2}{2\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}=\frac{5\sqrt{31}}{62}$. ………………………… 10 分

评分细则：

(1)在第(1)问中，曲线 C 的普通方程写成$(x-2)^2+y^2=16$，不扣分；

(2)在第(2)问中，先求出$|PA|+|PB|=|AB|$的值，再由点到直线的距离公式求出圆心 C 到直线 l 的距离 d，然后由两点之间的距离公式求出$|CP|$的值，从而求出$|PM|$的值，最后得到$\frac{|PM|}{|PA|+|PB|}=\frac{|PM|}{|AB|}$的值；

(3)若用其他解法，参照评分标准按步骤给分.

23. 解：(1)因为 $a=-3$，所以 $f(x)=|2x-3|$，则 $f(x)<3x$ 等价于$|2x-3|<3x$. ……… 1 分

当 $2x-3<0$，即 $x<\frac{3}{2}$时，$-(2x-3)<3x$，解得$\frac{3}{5}<x<\frac{3}{2}$；………………………………… 2 分

当 $2x-3\geqslant0$,即 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时,$2x-3<3x$,解得 $x\geqslant\frac{3}{2}$. ······································ 3 分

综上,不等式 $f(x)<3x$ 的解集为$(\frac{3}{5},+\infty)$. ·· 4 分

(2)$f(x)\geqslant2-|2x+2|$ 恒成立等价于 $|2x+a|+|2x+2|\geqslant2$. ······························ 5 分

因为 $|2x+a|+|2x+2|\geqslant|2x+a-(2x+2)|=|a-2|$, ··································· 7 分

所以 $|a-2|\geqslant2$, ·· 8 分

解得 $a\leqslant0$ 或 $a\geqslant4$,即 a 的取值范围为$(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$. ································ 10 分

评分细则:

(1)在第(1)问中,也可以将不等式 $f(x)<3x$ 等价于不等式组 $\begin{cases}x>0,\\(2x-3)^2<9x^2,\end{cases}$ 从而求出不等式的解集,只要计算正确,不扣分;

(2)在第(2)问中,最后结果没有写成集合或区间的形式,扣 1 分;

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.