2023年重庆一中高2023届4月月考

数学试题卷

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|x^2\le 4x, x\in \mathbf{N}_+\}$，集合 $B=\{x|\log_2(2^x-4)\le 2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. 3　　B. $(2,3]$　　C. $\{0,1,2,3\}$　　D. $\{3\}$

2. 已知第二象限角 α 的终边与单位圆交于 $P\left(m,\frac{3}{5}\right)$，则 $\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=$（　　）

A. $-\frac{5}{7}$　　B. -11　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 下列说法错误的是（　　）

A. 将一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个常数后，方差不变

B. 在残差图中，残差点分布的带状区域的宽度越狭窄，其模型拟合的精度越高

C. 在一个 2×2 列联表中，由计算得 χ^2 的值，则 χ^2 的值越大，判断两个变量间有关联的把握就越大

D. 线性回归方程对应的直线 $y=\hat{b}x+\hat{a}$，至少经过其样本数据点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n) 中的一个点

4. 林业部门规定：树龄500年以上的古树为一级，树龄300~500年之间的古树为二级，树龄100~299年的古树为三级，树龄低于100年不称为古树．林业工作者为研究树木年龄，多用年轮推测法，先用树木测量生长锥在树干上打孔，抽取一段树干计算年轮个数，由经验知树干截面近似圆形，年轮宽度依次构成等差数列．现为了评估某棵大树的级别，特测量数据如下：树干周长为3.14米，靠近树芯的第5个年轮宽度为0.4cm，靠近树皮的第5个年轮宽度为0.2cm，则估计该大树属于（　　）

A. 一级　　B. 二级　　C. 三级　　D. 不是古树

5. 已知 α，β 是空间中两个不重合的平面，l，m 是两条不同的直线，则下列说法错误的是（　　）

A. 若$\alpha // \beta$，则存在$l \subset \alpha$， $m \subset \beta$，使得$l \perp m$

B. 若$\alpha \perp \beta$，则存在$l \subset \alpha$， $m \subset \beta$，使得$l // m$

C. 若$\alpha // \beta$，则存在$l \subset \alpha$，使得$l \perp \beta$

D. 若$\alpha \perp \beta$，则存在$l \subset \alpha$，使得$l // \beta$

6. 已知抛物线$C: x^2 = 2py\left(p > 0\right)$的焦点为$F$，准线为$l$，直线$l'$过$F$且与抛物线$C$交于$M$，$N$两点，$l'$与$l$交于点$D$，则$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MF} =$（　　）

A. 0　　B. $\frac{p}{2}$　　C. $-\frac{p}{2}$　　D. p或$-p$

7. 已知定义在$\mathbf{R}$上的函数$f\left(x\right)$满足，$f\left(x_1 + x_2\right) = f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right)$，且当$x > 0$时，$f\left(x\right) > 0$，$f\left(1\right) = 1$，则关于$x$的不等式$2^{1+f(x)} + 2^{1-f(x)} + 2f\left(x^2\right) \le 7$的解集为（　　）

A. $\left[1, +\infty\right)$　　B. $\left[-1, 1\right]$　　C. $\left[-2, 2\right]$　　D. $\left[2, +\infty\right)$

8. 已知正数a，b满足$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$，若不等式$a + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + 2b^2} - mab \ge 0$恒成立，则$m$的最大值为（　　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$

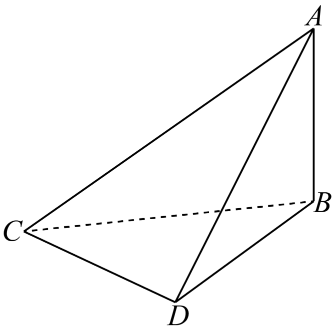
二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 已知复数z满足$\left(2 + \mathrm{i}\right)z = 1 + 3\mathrm{i}$，则（　　）

A. $\left|z\right| = \sqrt{2}$　　B. $\bar{z}$在复平面内对应的点位于第二象限

C. $z^4 = 4$　　D. z满足方程$z^2 - 2z + 2 = 0$

10. 八一广场位置处于解放碑繁华地段，紧挨着得意世界、大融城、八一好吃街等．重庆解放碑是抗战胜利纪功碑暨人民解放纪念碑，是抗战胜利的精神象征，是中国唯一一座纪念中华民族抗日战争胜利的纪念碑．现某兴趣小组准备在八一广场上对解放碑的高度进行测量，并绘制出测量方案示意图，A 为解放碑的最顶端，B 为解放碑的基座（即 B 在 A 的正下方），在广场内（与 B 在同一水平面内）选取 C，D 两点，则根据下列各组中的测量数据，能计算出解放碑高度 AB 的是（　　）



A. CD，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle BDC$　　B. CD，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ADC$

C. CD，$\angle ACB$，$\angle BCD$，$\angle ACD$　　D. BC，BD，$\angle ACB+\angle ADB=\frac{\pi}{2}$

11. 在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，则下列说法正确的是（　　）

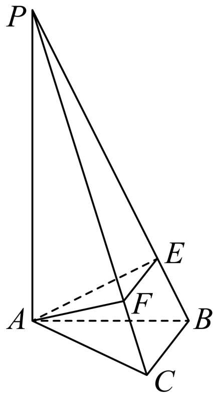
A. $|AC|^2+|BD|^2=2\left(|AB|^2+|AD|^2\right)$

B. 若 E 为 CD 的中点，AE 与 BD 交于点 F，则 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C. 若 $\left|\overrightarrow{DO}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=10$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-16$

D. 若 $\overrightarrow{AB}=(1,3)$，$\overrightarrow{BC}=(2,1)$，$M$，$N$ 为 AC 上的动点且 $\left|\overrightarrow{MN}\right|=1$，则 $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BN}$ 的最小值为 4

12. 在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．如图，在鳖臑 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90°$，作 $AE\perp PB$ 于 E，$AF\perp PC$ 于 F，若 $PA=4$，$AB=2$，则（　　）



A. 点 B 到平面 AEF 的距离恒为定值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

B. 鳖臑 $P-ABC$ 的外接球的表面积为定值 20π

C. 三棱锥 $P-AEF$ 也是一个鳖臑

D. 当三棱锥 $P-AEF$ 的体积最大时，$PC=2\sqrt{2}BC$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填写在答题卡相应位置上．

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x)+f(x)=0$，则 $f(2022)+f(2023)=$______.

14. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，A 为椭圆 C 的左顶点，以 F_1F_2 为直径的圆与椭圆 C 在第一、二象限的交点分别为 M，N，若直线 AM，AN 的斜率之积为 $\frac{1}{3}$，则椭圆 C 的标准方程为______.

15. 2023 年 2 月 8 日中国国民党主席夏立言率团访问大陆期间需安排含甲、乙、丙在内的 5 位志愿者分配到 3 个会议室参加服务，要求每位志愿者只能去 1 个会议室，每个会议室至少需要分配 1 位志愿者，则甲与乙分配在同一会议室，但甲与丙不在同一会议室的分配方案共有______种（用数字作答）.

16. 已知函数 $f(x)=a(\ln x-1)+(b+1)x$ 在区间 $\left[\mathrm{e},\mathrm{e}^3\right]$ 上存在零点，则 a^2+b^2 的最小值为______.

四、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=0$，且 $a_n>0(n\geq 2)$，$a_{n+1}=\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}$．

（1）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）若数列$\left\{b_n\right\}$满足$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$，若$\left\{b_n\right\}$的前n项和$T_n<m$恒成立，求整数m的最小值．

18. 在①$2a\cos C=2b-c$，②$\sqrt{3}b\cos\dfrac{B+C}{2}=a\sin B$，③$a\sin C=c\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$这三个条件中任选一个作为条件，补充到下面问题中，然后解答．

已知锐角$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且______（填序号）．

（1）若$a=\sqrt{3}$，$\cos\left(B-C\right)=\dfrac{9}{10}$，求$\triangle ABC$的面积；

（2）求$\dfrac{b+c}{a}$的取值范围．

19. 为提升教师的命题能力，重庆市第一中学定期举办教师命题大赛，大赛分初赛和复赛，初赛共进行4轮比赛，4轮比赛命制的题目均可适用于高一，高二，高三年级，每轮比赛结果互不影响．比赛规则如下：每一轮比赛，限时60分钟，参赛教师要在指定的知识范围内，命制非解答题，解答题各2道，若有不少于3道题目入选，将获得“优秀奖”，4轮比赛中，至少获得3次“优秀奖”的教师将进入复赛．为了能进入复赛，教师甲赛前多次进行命题模拟训练，指导老师从教师甲模拟训练命制的题目中，随机抽取了4道非解答题和4道解答题，其中有3道非解答题和2道解答题符合入选标准．

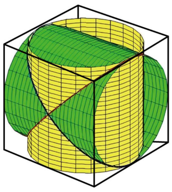
（1）若从模拟训练命制的题目中所抽取的8道题目中，随机抽取非解答题，解答题各2道，由此来估计教师甲在一轮比赛中的获奖情况，试预测教师甲在一轮比赛中获得“优秀奖”的概率；

（2）若以模拟训练命制的题目中所抽取的8道题目中两类题目各自入选的频率作为每道该类题目入选的概率，经指导老师对教师甲进行赛前强化训练后，每道非解答题入选的概率不变，每道解答题入选的概率比强化训练前大$\dfrac{1}{6}$，以获得“优秀奖”次数的期望作为判断依据，试预测教师甲能否进入复赛？

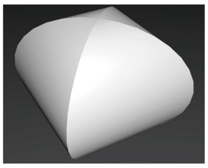
20. 魏晋时期数学家刘徽（图a）为研究球体的体积公式，创造了一个独特的立体图形“牟合方盖”，它由完全相同的四个曲面构成，相对的两个曲面在同一圆柱的侧面上．如图，将两个底面半径为1的圆柱分别从纵横两个方向嵌入棱长为2的正方体时（如图b），两圆柱公共部分形成的几何体（如图c）即得一个“牟合方盖”，图d是该“牟合方盖”的直观图（图中标出的各点A，B，C，D，P，Q均在原正方体的表面上）．

刘徽

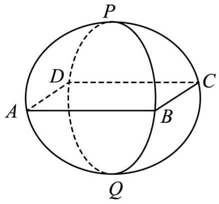
a



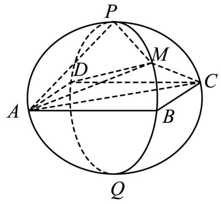
b



c



d



d

（1）由“牟合方盖”产生的过程可知，图 d 中的曲线 $PBQD$ 为一个椭圆，求此椭圆的离心率；

（2）如图 c，点 M 在椭圆弧 PB 上，且三棱锥 $A-DMC$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}$，求二面角 $P-AM-C$ 的正弦值．

21. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的实轴长为 2，两渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$．

（1）求双曲线 C 的方程；

（2）当 $a<b$ 时，记双曲线 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，动直线 $l:x=my+n$ 与双曲线 C 的右支交于 M，N 两点（异于 A_2），直线 A_1M，A_2N 相交于点 $T\left(x_0,y_0\right)$，证明：“$n=2$”的充要条件是“$x_0=\dfrac{1}{2}$”．

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(ax\right)-1+\dfrac{1}{x}$．

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 的最小值为 0，求实数 a 的值；

（2）证明：对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$x\in\left(0,+\infty\right)$，$\left(x-1\right)\mathrm{e}^{x-\frac{1}{n}}\geq\ln\dfrac{x}{n}$ 恒成立．