高三数学参考答案

1.【答案】 B

【解析】 $A=\{x|x^2\leqslant 1\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$, $B=\{x|\frac{2}{x}\geqslant 1\}=\{x|0<x\leqslant 2\}$,

$\therefore A\cap B=\{x|0<x\leqslant 1\}$.

2.【答案】 A

【解析】 $\because z=2+\mathrm{i}$, $\therefore \bar{z}=2-\mathrm{i}$, $\therefore \frac{\bar{z}}{z}=\frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$.

3.【答案】 C

【解析】 设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,由 $a_3+2a_5+a_9=10$ 得 $2a_1+9d=5$,

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$前 10 项的和 $S_{10}=10a_1+45d=5(2a_1+9d)=25$.

4.【答案】 D

【解析】 设 $P(x,y)$, $\because |PA|=\sqrt{3}|PB|$, $\therefore \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{3}\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,

整理得$(x-4)^2+y^2=12$,记为圆 M. $\because |PA|=\sqrt{3}|PB|>|PB|$,

$\therefore$ 若$\triangle PAB$ 为等腰三角形,则有$|PA|=|AB|=4$ 或$|PB|=|AB|=4$.

$\because$ 圆 A:$(x+2)^2+y^2=16$ 与圆 M 相交,故满足$|PA|=|AB|=4$ 点 P 有 2 个;

$\because$ 圆 B:$(x-2)^2+y^2=16$ 与圆 M 相交,故满足$|PB|=|AB|=4$ 点 P 有 2 个,

故使$\triangle PAB$ 为等腰三角形的点 P 共有 4 个.

5.【答案】 C

【解析】 两边同时平方得$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=4|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|^2$,展开整理得

$10\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3|\overrightarrow{AB}|^2+3|\overrightarrow{AC}|^2$,即 $10\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A=3|\overrightarrow{AB}|^2+3|\overrightarrow{AC}|^2$,

$\therefore \cos A=\frac{3|\overrightarrow{AB}|^2+3|\overrightarrow{AC}|^2}{10\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\geqslant\frac{6\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}{10\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{5}$,当且仅当$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$时等号成立.

又$\because \sin^2A+\cos^2A=1$ 且 $\sin A>0$, $\therefore \cos A=\frac{3}{5}$时,$\sin A$ 取最大值$\frac{4}{5}$.

6.【答案】 D

【解析】 若揉捻工序分配 2 人,有 $C_6^2C_4^2+C_6^2C_4^1A_2^2=210$ 种分配方案;

若揉捻工序分配 3 人,有 $C_6^3C_3^1A_2^2=120$ 种分配方案;

若揉捻工序分配 4 人,有 $C_6^4A_2^2=30$ 种分配方案;

故共有 $210+120+30=360$ 种分配方案.

7.【答案】 B

【解析】 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, $\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$, $\therefore C(-(x_1+x_2),-(y_1+y_2))$.

又$\because$ A、B、C 在椭圆上,$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$①,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$②,$\frac{(x_1+x_2)^2}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)^2}{b^2}=1$③,

将①②代入③式得:$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=-\frac{1}{2}$④.

①×②$-$④^2 得:$\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{a^2b^2}=\frac{3}{4}$, $\therefore |x_1y_2-x_2y_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}ab$.

$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle OAB}=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sin\angle AOB$

$=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\frac{3}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|}\right)^2}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|)^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{3}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}$

$=\frac{3}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$,

$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{4}ab=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $\therefore \frac{b}{a}=\frac{2}{3}$, $\therefore e^2=1-(\frac{b}{a})^2=\frac{5}{9}$, $\therefore e=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

8.【答案】 A

【解析】 $\because f(x)$是偶函数,$\therefore f(x)$的图象关于 $x=0$ 对称,

记 $g(x)=f(x)+f(2-x)$,则 $g'(x)=f'(x)-f'(2-x)=0$,

不妨设 $g(x)=m$(m 为常数),即$f(x)+f(2-x)=m$,

$\therefore f(x)$的图象关于点$(1,\frac{m}{2})$对称,易证$f(x)$是以 4 为周期的周期函数.

又$\because f(x)$在区间$[2023,2024]$上单调递减,$\therefore f(x)$在区间$[-1,0]$上单调递减,

$\therefore f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增.

$\because a=4^{-0.8}=(\frac{1}{4})^{\frac{4}{5}}$, $\therefore a^5=\frac{1}{256}<\frac{1}{243}=(\frac{1}{3})^5=b^5$, $\therefore 0<a<b<1$.

记 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1\ (x>1)$,则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}>0$,

$\therefore$ $h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$\therefore h(x)>h(1)=0$,

$\therefore$ 当 $x\in(1,+\infty)$时,有 $\ln x>1-\frac{1}{x}$, $\therefore \ln\frac{3}{2}>\frac{1}{3}$,又 $\ln\frac{3}{2}<1$,

$\therefore 0<a<b<c<1$, $\therefore f(a)<f(b)<f(c)$.

9.【答案】 ACD

【解析】 $\alpha=0$ 时,$l_1:y=1$,$l_2:y=-1$,$l_1/\!/l_2$,故 A 正确;

$\because \sin\alpha\cdot(-\sin\alpha)-\cos^2\alpha=-1\neq0$, $l_2\not\parallel l_3$,故 B 错误;

$\because \sin\alpha\cdot\cos\alpha+(-\cos\alpha)\cdot(\sin\alpha)=0$ 恒成立,$\therefore l_1\perp l_4$,故 C 正确;

坐标原点$(0,0)$到四条直线距离均为 1,故 D 正确.

10.【答案】 BC

【解析】 $10\times0.7=7$,所以甲的环数的 70% 分位数是$\frac{7+8}{2}=7.5$,故 A 错误;

$\bar{x}_{甲}=\frac{4+5+5+6+6+7+7+8+8+9}{10}=6.5$, $\bar{x}_{乙}=\frac{2+5+6+6+7+7+7+8+9+10}{10}=6.7$,

$\bar{x}_{甲}<\bar{x}_{乙}$,故 B 正确;

这 20 个数据的平均值 $\bar{x}=\frac{6.5\times10+6.7\times10}{20}=6.6$,故 C 正确;

这 20 个数据的方差为

$s^2=\frac{1}{20}\{10\times[2.25+(6.5-6.6)^2]+10\times[4.41+(6.7-6.6)^2]\}=3.34$,故 D 错误.

11.【答案】 ACD

【解析】 取 AD 中点 Q,连接 PQ、FQ,

一

易证 $GM\perp$ 平面 PQF，$\therefore GM\perp PF$，

连接 BA_1，易证 $GN\perp$ 平面 PFA_1B，$\therefore GN\perp PF$，

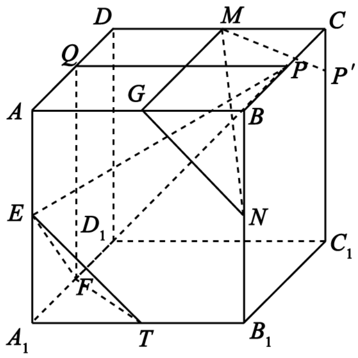
又 $GM\cap GN=G$，$PF\perp$ 平面 GMN，

$\because PF\subset$ 平面 PEF，$\therefore$ 平面 $PEF\perp$ 平面 GMN，故 A 正确；

取 A_1B_1 中点 T，连接 ET、FT，

$\because ET/\!/GN$，$\therefore \angle TEF$ 是异面直线 EF、GN 所成的角，

又 $EF=FT=ET=\sqrt{2}$，$\therefore \angle TEF=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \cos\angle TEF=\dfrac{1}{2}$，故 B 错误；



记正方体的中心为点 O，

则 $|OE|=|OF|=|OG|=|OM|=|ON|=\sqrt{2}$，

故点 E、F、G、M、N 在以 O 为球心，以 $\sqrt{2}$ 为半径的球面上，故 C 正确；

$\because \overrightarrow{A_1P}=t\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1M}-2t\overrightarrow{A_1B_1}$，$E$ 是 A_1A 的中点，$\therefore \overrightarrow{A_1P}-\overrightarrow{A_1M}=2t\overrightarrow{A_1E}-2t\overrightarrow{A_1B_1}$，

$\therefore \overrightarrow{MP}=2t\overrightarrow{B_1E}$，$\therefore P$ 点轨迹是过点 M 与 B_1E 平行的线段 MP'，且 $|CP'|=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore |MP'|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，故 D 正确.

12.【答案】 AB

【解析】 设直线 l_0：$x=ty+1$，与 $y^2=4x$ 联立得：$y^2-4ty-4=0$，

由韦达定理得：$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$.

当 $t\neq 0$ 时，直线 l_0 与 y 轴相交于点 $G(0,y_3)$，$\therefore\ y_3=-\dfrac{1}{t}$，

$\therefore \dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}-\dfrac{1}{y_3}=\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}-\dfrac{1}{y_3}=\dfrac{4t}{-4}-\dfrac{1}{-\dfrac{1}{t}}=0$，$\therefore \dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{y_3}$，故 A 正确；

设点 M 坐标为 (x,y)，则 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=2t$，$x=ty+1=2t^2+1$，消去 t 得 $y^2=2x-2$，故 B 正确；

由 $\overrightarrow{FT}=(-1,1)$，$\overrightarrow{OM}=(x,y)$ 得

$\overrightarrow{FT}\cdot\overrightarrow{OM}=-x+y=-\left(\dfrac{y^2+2}{2}\right)+y=-\dfrac{1}{2}(y-1)^2-\dfrac{1}{2}\leqslant-\dfrac{1}{2}$，故 C 错误；

$\because\ |AC|=x_1+1-r$，$|CD|=2r$，$|DB|=x_2+1-r$，

若 $|AC|$、$|CD|$、$|DB|$ 成等差数列，则有 $2|CD|=|AC|+|DB|$，即 $4r=x_1+1-r+x_2+1-r$，

$\therefore 6r=x_1+x_2+2=t(y_1+y_2)+4=4t^2+4\geqslant 4$，$\therefore r\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)$，故 D 错误.

13.【答案】 -20

【解析】 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}y^{-r}(0\leqslant r\leqslant 5,r\in\mathbf{N})$，

$r=3$ 时，x^2 项的系数为 $-2\times C_5^2=-20$.

14.【答案】 $\dfrac{16}{25}$

【解析】 抽到大学生的概率是 $\dfrac{2}{5}$，抽到高中生的概率是 $\dfrac{3}{10}$，抽到初中生的概率是 $\dfrac{3}{10}$，

由全概率公式得嘉宾获胜的概率为 $P=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{10}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{16}{25}$.

15.【答案】 2(2 分)　　506(3 分)

【解析】 $\because g(x)=a\sin\frac{\pi x}{4}$是"2 等值函数",$\therefore g(2x)=g(x)\cdot g(x+2)$对$x\in\mathbf{R}$恒成立,

$\therefore a\sin\frac{\pi x}{2}=a\sin\frac{\pi x}{4}\cdot a\sin\frac{\pi(x+2)}{4}$,$\therefore a\sin\frac{\pi x}{2}=a\sin\frac{\pi x}{4}\cdot a\cos\frac{\pi x}{4}$,

$\therefore a\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{a^2}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$,$\because \sin\frac{\pi x}{2}$不恒为 0,$\therefore a=\frac{a^2}{2}$,又$\because a>0$,$\therefore a=2$.

$\therefore g(x)=2\sin\frac{\pi x}{4}$,$g(x)$的最小正周期为 8,把$[0,8]$视为第一个周期,

则区间$[0,2023]$包含 $252\frac{7}{8}$个周期,且每个周期内$y=g(x)$与$y=1$的交点均在前半个周期内,

故函数$y=g(x)-1$在区间$[0,2023]$上共有 506 个零点.

16.【答案】 $(e^2-4,+\infty)$

【解析】 设切点为$(x_0,x_0e^{x_0})$,$f'(x)=(x+1)e^x$,

$\therefore$ 切线斜率$k=(x_0+1)e^{x_0}$,切线方程为$y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$,

$\because$ 过点$P(t,-1)$有三条与函数$f(x)=xe^x$图象相切的直线,

$\therefore$ 方程$-1-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(t-x_0)$有三个不同的解,整理得$(x_0^2-tx_0-t)e^{x_0}-1=0$.

记$g(x)=(x^2-tx-t)e^x-1$,则$g'(x)=[x^2+(2-t)x-2t]e^x=(x+2)(x-t)e^x$,

令$g'(x)=0$得$x=-2$或$x=t$,

当$t<-2$时,$g(x)$在$(-\infty,t)$上单调递增,在$(t,-2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增.

$\therefore g(x)_{极大值}=g(t)=-te^t-1$.

记$h(t)=-te^t-1\ (t<-2)$,$h'(t)=-(t+1)e^t>0$,$\therefore$ $h(t)$在$(-\infty,-2)$上单调递增,

$h(t)<h(-2)=\frac{2}{e^2}-1<0$,$\therefore g(x)_{极大值}=g(t)=-te^t-1<0$,

$\therefore g(x)$在$(-\infty,-2)$上无零点,在$\mathbf{R}$上至多只有一个零点,不符合题意.

当$t=-2$时,$g'(x)=(x+2)^2e^x\geqslant 0$恒成立,

$\therefore g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增,至多只有一个零点,不符合题意.

当$t>-2$时,$g(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递增,在$(-2,t)$上单调递减,在$(t,+\infty)$上单调递增.

当$x\to-\infty$时,$g(x)\to-1$,故有

$\begin{cases}g(-2)=(4+t)e^{-2}-1>0 ① \\ g(t)=-te^t-1<0 ②\end{cases}$,由①式得$t>e^2-4$,此时②式显然成立,

综上实数t的取值范围是$(e^2-4,+\infty)$.

17.【解析】 (1)由$\sin B(1+\cos A)=\sin A(2-\cos B)$得

$\sin B+\sin B\cos A=2\sin A-\sin A\cos B$,

$\therefore \sin B+\sin(A+B)=2\sin A$,

又$\because \sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,$a=2$,

$\therefore \sin B+\sin C=a\sin A$, ……………………………………………………………… (2 分)

$\triangle ABC$中,由正弦定理得:$b+c=a^2$. ……………………………………………………… (3 分)

$\therefore a+b+c=a^2+a=4+2=6$,

$\therefore \triangle ABC$的周长是 6; ……………………………………………………………… (5 分)

(2) $\because bc \leqslant \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立. ………………………………………………（7 分）

$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc} = \frac{6}{bc} - 1 \geqslant \frac{6}{4} - 1 = \frac{1}{2}$， ………………………………（9 分）

$\therefore \cos A$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………（10 分）

18.【解析】 (1) 连接 CF，过点 F 作 $FG /\!/ AB$，交 PA 于点 G，连接 EG. ……………………（1 分）

$\because \overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}$，$\therefore GF = \frac{2}{3}AB$，

$\because \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$，$\therefore EC = \frac{2}{3}DC$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 是矩形，$\therefore BA \perp AD$，$AB \mathrel{\underline{/\!/}} DC$，$\therefore GF \mathrel{\underline{/\!/}} EC$，

$\therefore$ 四边形 $ECFG$ 是平行四边形，$\therefore CF /\!/ EG$， ………………………………………………（3 分）

又 $\because CF \not\subset$ 平面 PAE，$EG \subset$ 平面 PAE，

$\therefore CF /\!/$ 平面 PAE； ……………………………………………………………………………（5 分）

(2) $\triangle PAD$ 中，$AD = AP = 2$，$PD = 2\sqrt{3}$，

$\therefore \cos\angle DAP = \frac{2^2+2^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times2\times2} = -\frac{1}{2}$. ……………………………………………（6 分）

$\therefore \angle DAP = 120°$.

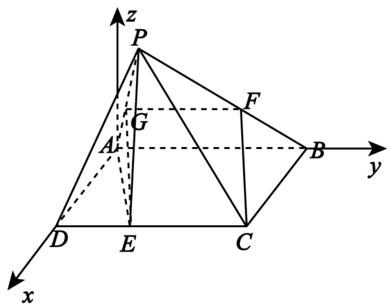
如图，以点 A 为坐标原点，以 AD、AB 分别为 x 轴、y 轴，以过点 A 与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系.

则 $A(0,0,0)$、$E(2,1,0)$、$P(-1,0,\sqrt{3})$、$B(0,3,0)$、$C(2,3,0)$， ……………………………（7 分）

$\therefore \overrightarrow{AE} = (2,1,0)$，$\overrightarrow{AP} = (-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB} = (1,3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PC} = (3,3,-\sqrt{3})$.

设 $\boldsymbol{n}_1 = (x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PAE 的法向量，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \boldsymbol{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 2x_1 + y_1 = 0, \\ -x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \end{cases}$



令 $x_1 = \sqrt{3}$ 得 $y_1 = -2\sqrt{3}$，$z_1 = 1$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1 = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}, 1)$. ……………………………………………（8 分）

设 $\boldsymbol{n}_2 = (x_2,y_2,z_2)$ 是平面 PBC 的法向量，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \\ \boldsymbol{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x_2 + 3y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \\ 3x_2 + 3y_2 - \sqrt{3}z_2 = 0, \end{cases}$

$\therefore x_2 = 0$，令 $z_2 = \sqrt{3}$ 得 $y_2 = 1$，

$\therefore \boldsymbol{n}_2 = (0,1,\sqrt{3})$. ……………………………………………………………………（10 分）

设平面 PAE 与平面 PBC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|-2\sqrt{3}+\sqrt{3}|}{4\times2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

则平面 PAE 与平面 PBC 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{3}}{8}$. ……………………………………………（12 分）

19.【解析】 (1)$\because b_1=1, \therefore S_1=1.$ ………………………………………… (1 分)

$\because \dfrac{S_{n+1}}{S_n}=(1+\dfrac{1}{n})^2=\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$,

$\therefore \dfrac{S_{n+1}}{(n+1)^2}=\dfrac{S_n}{n^2}$,

$\therefore \left\{\dfrac{S_n}{n^2}\right\}$是常数列, ………………………………………… (2 分)

$\therefore \dfrac{S_n}{n^2}=\dfrac{S_1}{1^2}=1$,

$\therefore S_n=n^2$, ………………………………………… (3 分)

$\therefore n\geqslant 2$ 时, $b_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$, ………………………… (4 分)

$n=1$ 时, $b_1=1$ 也成立, ………………………………………… (5 分)

$\therefore b_n=2n-1$; ………………………………………… (6 分)

(2) $\because b_{n+1}=a_n b_n$,

$\therefore a_n=\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2n+1}{2n-1}$, ………………………………………… (7 分)

$\therefore c_n=(2-a_n)\cdot(a_{n+1}-1)\cdot 2^n=\left(2-\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}-1\right)\cdot 2^n$

$=\dfrac{(2n-3)\cdot 2^{n+1}}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{2^{n+2}}{2n+1}-\dfrac{2^{n+1}}{2n-1}$. ………………………… (10 分)

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_2+\cdots+c_n$

$=\left(\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{2^2}{1}\right)+\left(\dfrac{2^4}{5}-\dfrac{2^3}{3}\right)+\left(\dfrac{2^5}{7}-\dfrac{2^4}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2^{n+2}}{2n+1}-\dfrac{2^{n+1}}{2n-1}\right)$

$=\dfrac{2^{n+2}}{2n+1}-4.$ ………………………………………… (12 分)

20.【解析】 (1)设甲积分为 ξ,则 ξ 的可能取值为 0,1,2,3,4,6, ………………………… (1 分)

$P(\xi=0)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}$,

$P(\xi=1)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$,

$P(\xi=2)=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{15}$,

$P(\xi=3)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{15}$,

$P(\xi=4)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$,

$P(\xi=6)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{15}.$ ………………………………………… (4 分)

$\therefore \xi$ 的分布列为:

ξ	0	1	2	3	4	6
P	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{15}$

………………………………………… (5 分)

$\therefore E(\xi)=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{4}{15}+4\times\frac{1}{5}+6\times\frac{2}{15}=\frac{41}{15}$; ………………………………（6 分）

(2)若甲、乙积分相同,则只能同时积 1 分、2 分、3 分、4 分, ………………………………（7 分）

若甲、乙均积 1 分,则甲、乙对局平局,甲、丙对局丙胜,乙、丙对局丙胜,

其概率为:$P_1=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{45}$; ………………………………（8 分）

若甲、乙均积 2 分,则甲、乙对局平局,甲、丙对局平局,乙、丙对局平局,

其概率为:$P_2=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{90}$; ………………………………（9 分）

若甲、乙均积 3 分,则甲、乙对局甲胜,甲、丙对局丙胜,乙、丙对局乙胜,或者甲、乙对局乙胜,甲、丙对局甲胜,乙、丙对局丙胜,其概率为:全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

$P_3=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}+\frac{2}{45}=\frac{1}{9}$; ………………………………（10 分）

若甲、乙均积 4 分,则甲、乙对局平局,甲、丙对局甲胜,乙、丙对局乙胜,其概率为:

$P_4=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{30}$; ………………………………（11 分）

所以甲、乙积分相同的概率为 $P=\frac{1}{45}+\frac{1}{90}+\frac{1}{9}+\frac{1}{30}=\frac{8}{45}$. ………………………………（12 分）

21.【解析】 设 $M(x,y)$,则 $|MF_1|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$, $|MO|=\sqrt{x^2+y^2}$, $|MF_2|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,

$\because$ $|MF_1|$、$|MO|$、$|MF_2|$ 成等比数列,

$\therefore |MO|^2=|MF_1|\cdot|MF_2|$.

$\therefore x^2+y^2=\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, ………………………………（2 分）

两边同时平方得:$(x^2+y^2)^2=(x^2+y^2+1)^2-(2x)^2$,

$\therefore (2x)^2=(x^2+y^2+1)^2-(x^2+y^2)^2$,整理得 $2x^2-2y^2=1$,

所以曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$; ………………………………（5 分）

(2)设直线 NF_1 方程为:$y=k(x+1)(k\neq0)$,设点 $N(x_1,y_1)$、$P(x_2,y_2)$,则 $M(x_1,-y_1)$.

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\2x^2-2y^2=1\end{cases}$,代入得 $(2-2k^2)x^2-4k^2x-(2k^2+1)=0$. ………………………………（6 分）

$\because$ 直线 NF_1 与双曲线 E 交点 P、N 分别在双曲线左、右支,

$\therefore \begin{cases}2-2k^2\neq0,\\\Delta=16k^4+4(2-2k^2)(2k^2+1)=8(k^2+1)>0,\\-\frac{2k^2+1}{2-2k^2}<0,\end{cases}$ 解得 $0<k^2<1$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2-2k^2}$, $x_1x_2=-\frac{2k^2+1}{2-2k^2}$. ………………………………（7 分）

直线 MP 的斜率 $k_{MP}=-\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}$,

直线 MP 的方程为 $y-y_2=-\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$,

整理得 $y=-\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}\left(x-\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}\right)$. ………………………………（9 分）

又$\because \dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\dfrac{x_1k(x_2+1)+x_2k(x_1+1)}{k(x_1+1)+k(x_2+1)}=\dfrac{2kx_1x_2+k(x_1+x_2)}{k(x_1+x_2)+2k}=\dfrac{2x_1x_2+x_1+x_2}{x_1+x_2+2}$

$=\dfrac{-\dfrac{2(2k^2+1)}{2-2k^2}+\dfrac{4k^2}{2-2k^2}}{\dfrac{4k^2}{2-2k^2}+2}=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… (11 分)

直线 MP 的方程为 $y=-\dfrac{y_1+y_2}{x_1-x_2}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$,

故直线 MP 过定点$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$. ……………………………………………………………… (12 分)

22.【解析】 (1)$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$,$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$,…………………………… (1 分)

$f''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$,

$\therefore f'(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增,又$f'(0)=0$,

$\therefore x\in(-1,0)$,$f'(x)<0$,$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$在$(-1,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增, ………………………………………… (3 分)

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 时取得极小值$f(0)=0$,无极大值. ……………………………………………… (4 分)

(2)①记 $h(x)=g(x)-f(x)=ax+\dfrac{a}{x+1}-a-x\ln(x+1)\ (-1<x<0)$,

$\therefore h'(x)=a-\dfrac{a}{(x+1)^2}-\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$,

$\therefore h''(x)=\dfrac{2a}{(x+1)^3}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{2a-(x+1)^2-(x+1)}{(x+1)^3}=\dfrac{2a-(x^2+3x+2)}{(x+1)^3}$, ……… (5 分)

$\because y=x^2+3x+2$ 在$(-1,0)$上单调递增,$\therefore x^2+3x+2\in(0,2)$.

当 $a\geqslant 1$ 时,$2a-(x^2+3x+2)>0$,$\therefore h''(x)>0$,

$\therefore h'(x)$在$(-1,0)$上单调递增,$\therefore h'(x)<h'(0)=0$,

$\therefore h(x)$在$(-1,0)$上单调递减,$\therefore h(x)>h(0)=0$,

即 $g(x)>f(x)$成立,$\therefore a\geqslant 1$ 符合题意. …………………………………………………………… (6 分)

当 $a<1$ 时,存在实数 $x_0\in(-1,0)$,使 $x\in(x_0,0)$时,$2a-(x^2+3x+2)<0$,即 $h''(x)<0$.

$\therefore h'(x)$在$(x_0,0)$上单调递减,

$\therefore h'(x)>h'(0)=0$,$\therefore h(x)$在$(x_0,0)$上单调递增,

$\therefore x\in(x_0,0)$时,$h(x)<h(0)=0$,即 $g(x)<f(x)$,$\therefore a<1$ 不符合题意. ……………………… (7 分)

综上可知,实数 a 的取值范围为 $a\geqslant 1$; …………………………………………………………… (8 分)

②记 $\varphi(x)=x-\ln(x+1)\ (x\geqslant 0)$,则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}\geqslant 0$,

$\therefore \varphi(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$\therefore \varphi(x)\geqslant\varphi(0)=0$.

$\therefore x\geqslant 0$ 时,$x\geqslant\ln(x+1)$,$\therefore x^2\geqslant x\ln(x+1)$. ………………………………………………… (9 分)

记 $t(x)=x^2$,$x\in[0,+\infty)$时,$f(x)\leqslant t(x)$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

x_1、x_2 是函数 $y=f(x)-b(b>0)$的两个零点,不妨设 $-1<x_1<0<x_2$.

记 $y=g(x)-b(-1<x<0)$的零点为 x_3,$y=t(x)-b(x\geqslant 0)$的零点为 x_4.

$\because f(x_1)=g(x_3)=b$ 且 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减,

$\therefore f(x_3)<g(x_3)=f(x_1)$, $\therefore -1<x_1<x_3<0$.

$\because f(x_2)=t(x_4)=b$ 且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x_4)<t(x_4)=f(x_2)$, $\therefore 0<x_4<x_2$.

$\therefore |x_1-x_2|>x_4-x_3$. ………………………………………………………………………… (11 分)

又 $a=1$ 时, $g(x)=x+\dfrac{1}{x+1}-1$,

由 $g(x_3)=b$ 且 $x_3\in(-1,0)$, 解得 $x_3=\dfrac{b-\sqrt{b^2+4b}}{2}$.

由 $t(x_4)=b$ 且 $x_4\in(0,+\infty)$, 解得 $x_4=\sqrt{b}$.

$x_4-x_3=\dfrac{\sqrt{b^2+4b}+2\sqrt{b}-b}{2}$,

$|x_1-x_2|>\dfrac{\sqrt{b^2+4b}+2\sqrt{b}-b}{2}$, 即 $2|x_1-x_2|>\sqrt{b^2+4b}+2\sqrt{b}-b$. ………………………… (12 分)