长沙市一中 2023 届高三月考试卷（七）

数学

1.【答案】C

2. 【答案】B

3. 【答案】C

4.【答案】D

5.【答案】B

6. 【答案】B

7. 【答案】C

8. 【答案】D

9. 【答案】ACD

10. 【答案】BC

11. 【答案】ABD

12. 【答案】ACD

13.【答案】 $\frac{1}{2}\vec{b}$

14. 【答案】 0 或 $-e^2$ ##$-e^2$ 或 0

15.【答案】 36π

16. 【答案】 ①. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$ ②. $(2,6)$

17. 【答案】（1） $b=2$；

（2） $2\sqrt{2}$.

【解析】【分析】（1）先利用三角恒等变换化简得 $3\sin B=\sin A+\sin C$，再利用正弦定理化简即得解；

（2）先利用基本不等式求出 $ac\le 9$，再利用余弦定理求出 $\cos B$ 得到 $\sin B$，即得解.

【小问 1 详解】

$\because (3-\cos A)\sin B=\sin A(1+\cos B)$,

则 $3\sin B=\sin A+\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A+\sin(A+B)$，$A+B+C=\pi$,

$\therefore 3\sin B=\sin A+\sin C$，

$\therefore$ 由正弦定理可得 $3b=a+c=6$，

$\therefore b=2$.

【小问 2 详解】

$\because a+c=6$，

$\therefore 6=a+c\ge 2\sqrt{ac}$，可得 $ac\le 9$（当且仅当 $a=c=3$ 时等号成立），

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(a+c)^2-2ac-4}{2ac}=\frac{16-ac}{ac}$，

可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{16-ac}{ac}\right)^2}=\frac{4}{ac}\sqrt{2ac-16}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times ac\times\frac{4}{ac}\sqrt{2ac-16}=2\sqrt{2ac-16}\le 2\sqrt{2\times 9-16}=2\sqrt{2}$（当且仅当$a=c=3$时等号成立）.

$\therefore$ $\triangle ABC$的面积的最大值为$2\sqrt{2}$.

18. 【答案】（1）$a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$

（2）证明见解析.

【解析】【分析】（1）先由累乘法求得S_n，再根据a_n与S_n的关系即可求得数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）先由条件求得数列$\{b_n\}$的通项公式，即可得到c_n，然后根据裂项相消法即可证明.

【小问1详解】

因为$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$，则$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1},\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2},\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3},\cdots\cdots,\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}=\frac{n}{n-2},\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，

累乘可得，$\frac{S_n}{S_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$，$n\ge 2$

所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2},n\ge 2$，又$S_1=a_1=1$符合式子，

所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2},n\in\mathbf{N}^*$，

当$n\ge 2$时，$S_{n-1}=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}$，

所以两式相减可得$a_n=S_n-S_{n-1}=n$，$n\ge 2$，

又$a_1=1$符合上式，所以$a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$

【小问2详解】

因为数列$\{b_n\}$为等比数列，$b_2=2$，且$b_1b_2b_3b_4b_5=2^{10}$，

设数列$\{b_n\}$的公比为q，则$(b_2q)^5=2^{10}$，即$(2q)^5=2^{10}$，

所以$q=2$，则$b_n=2^{n-1}$

所以$c_n=\frac{2+n}{n(n+1)\cdot 2^n}=\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$，

即$c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{32}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right]$

$=1-\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}<1$

19. 【答案】（1）证明见解析

（2）PQ与平面AA_1C_1C所成最大角的正切值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，此时二面角$Q-AP-C$的余弦值为$\frac{2\sqrt{89}}{89}$

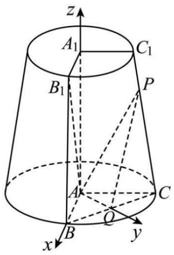
【解析】【分析】(1) 由已知可建立以 A 为原点，AB, AQ, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，利用空间向量的坐标运算，即可证明线面平行；

(2) 根据已知可建立以 A 为原点，AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，设 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CC_1}$，$\lambda \in [0,1]$，根据线面关系求得 PQ 与平面 AA_1C_1C 所成最大角的正切值，即得 λ 的值，利用空间向量坐标运算即可求得此时二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值.

【小问 1 详解】

因为 $AA_1 \perp AB$，所以 $AA_1 \perp AC$，所以 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \theta = 120°$，又 $AB \cap AC = A, AB, AC \subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC，

又 $AQ \subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1 \perp AQ$，又 $AQ \perp AB$，如图，以 A 为原点，AB, AQ, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



由于 $AB = AA_1 = 2A_1B_1 = 6$，所以 $AQ = 2\sqrt{3}$，则 $Q(0, 2\sqrt{3}, 0), C(-3, 3\sqrt{3}, 0), C_1\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 6\right)$，

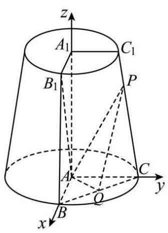
又 $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$，所以 $(x_P + 3, y_P - 3\sqrt{3}, z_P) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 6\right) = (1, -\sqrt{3}, 4)$，则 $P(-2, 2\sqrt{3}, 4)$，

所以 $\overrightarrow{PQ} = (-2, 0, -4)$，又 y轴 $\perp$ 平面 AA_1B_1B，故 $\vec{n} = (0,1,0)$ 可为平面 AA_1B_1B 的一个法向量，

又 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 0 + 0 + 0 = 0$，且 $PQ \not\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $PQ //$ 平面 AA_1B_1B；

【小问 2 详解】

因为 $AA_1 \perp AB$，所以 $AA_1 \perp AC$，所以 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \theta = 90°$，如图，以 A 为原点，$AB, AC, AA_1$ 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



则 $B(6,0,0), C(0,6,0), C_1(0,3,6), Q(3,3,0)$，

设 $\overrightarrow{CP} = \lambda\overrightarrow{CC_1}$，$\lambda \in [0,1]$，则 $\overrightarrow{CP} = \lambda(0,-3,6) = (0, -3\lambda, 6\lambda)$，则

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{CQ} - \overrightarrow{CP} = (3,-3,0) - (0,-3\lambda,6\lambda) = (3, -3+3\lambda, -6\lambda)$，又 x轴 $\perp$ 平面 AA_1C_1C，所以 $\vec{m} = (1,0,0)$ 可作为平

面 AA_1C_1C 的一个法向量，

设 PQ 与平面 AA_1C_1C 所成角为 α，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha=\left|\cos\overrightarrow{PQ},\vec{m}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\vec{m}\right|}=\frac{3}{\sqrt{45\lambda^2-18\lambda+18}}$，

又函数 $y=\sin\alpha$ 与 $y=\tan\alpha$ 均在 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以当 $\lambda=\frac{1}{5}$ 时，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{45\lambda^2-18\lambda+18}}$ 有最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$，此时 $\tan\alpha$ 也取到最大值，

又 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2}{3}$，则 $(\tan\alpha)_{\max}=\frac{\sqrt{5}}{2}$；

设此时平面 APQ 的法向量为 $\vec{p}=(x,y,z)$，又

$\overrightarrow{AQ}=(3,3,0),\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{PQ}=(3,3,0)-\left(3,-\frac{12}{5},-\frac{6}{5}\right)=\left(0,\frac{27}{5},\frac{6}{5}\right)$

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{p}=0\\\overrightarrow{AP}\cdot\vec{p}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+3y=0\\\frac{27}{5}y+\frac{6}{5}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y\\y=-\frac{2}{9}z\end{cases}$，令 $z=9$，则 $\vec{p}=(2,-2,9)$，

$\vec{m}=(1,0,0)$ 是平面 APC 的一个法向量，

所以 $\cos\vec{m},\vec{p}=\frac{\vec{m}\cdot\vec{p}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{p}|}=\frac{2}{1\times\sqrt{89}}=\frac{2\sqrt{89}}{89}$，由图可知二面角 $Q-AP-C$ 为锐角，即二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{89}}{89}$.

所以 PQ 与平面 AA_1C_1C 所成最大角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，此时二面角 $Q-AP-C$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{89}}{89}$.

20. 【答案】(1) $\frac{20}{49}$

(2) $E(X)=\frac{537}{125}$.

【解析】【分析】(1) 根据古典概型概率公式、全概率公式可得 2 班代表队从乙箱中取出 1 个选择题的概率，然后根据条件概率公式计算即可；

(2) 由题意知：X 的可能取值为 3，4，5，分别计算对应的概率，利用数学期望的公式计算 $E(X)$.

【小问 1 详解】

设事件 A 为"2 班代表队从乙箱中取出 1 个选择题"，事件 B_1 为"1 班代表队从甲箱中取出 2 个都是选择题"，事件 B_2 为"1 班代表队从甲箱中取出 1 个选择题 1 个填空题"，事件 B_3 为"I 班代表队从甲箱中取出 2 个题都是填空题"

则 B_1、B_2、B_3 彼此互斥，且 $B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$，

因为 $P(B_1)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{5}{14}$，$P(B_2)=\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$，$P(B_3)=\dfrac{C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{3}{28}$

所以 $P(A|B_1)=\dfrac{6}{9}$，$P(A|B_2)=\dfrac{5}{9}$，$P(A|B_3)=\dfrac{4}{9}$，

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)=\frac{5}{14}\times\frac{6}{9}+\frac{15}{28}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{28}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{12},$$

所求概率即是 A 发生的条件下 B_1 发生的概率：

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{14}\times\frac{6}{9}}{\frac{7}{12}}=\frac{20}{49}.$$

【小问 2 详解】

由题意知：X 的可能取值为 3、4、5，

两班代表队打完三局恰好结束比赛的基本事件有{三局 6 班胜}，{三局 18 班胜}，

而第一局比赛 6 班获胜的概率为 $\dfrac{3}{5}$，则第一局比赛 18 班获胜的概率为 $\dfrac{2}{5}$，又胜者在接下来一局获胜的概率为 $\dfrac{2}{5}$，

所以 $P(X=3)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{12}{125}+\dfrac{8}{125}=\dfrac{4}{25}$，

当 $X=4$ 时，前三局{两局 6 班胜，一局 18 班胜，最后 6 班胜}，{两局 18 班胜，一局 6 班胜，最后 18 班胜}，

最后 6 班胜概率为 $P_1=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{132}{625}$，

最后 18 班胜概率为 $P_2=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{108}{625}$，

所以 $P(X=4)=\dfrac{132}{625}+\dfrac{108}{625}=\dfrac{48}{125}$，

则有 $P(X=5)=1-P(X=4)-P(X=3)=\dfrac{57}{125}$，

综上，$E(X)=3\times\dfrac{4}{25}+4\times\dfrac{48}{125}+5\times\dfrac{57}{125}=\dfrac{537}{125}$.

21. 【答案】(1) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(2) $\left[\dfrac{16\sqrt{3}}{3},+\infty\right]$

【解析】【分析】(1) 易得两渐近线 $l_1:y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x,l_2:y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，设 $A\left(x_1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1\right),B\left(x_2,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_2\right),(x_1>0),P(x_0,y_0)$，根据 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，将 P 点的坐标用 x_1,x_2,λ 表示，再根据点

P 在曲线 C 上，可得 x_1,x_2,λ 的关系，再根据 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB$ 化简整理即可得解；

（2）分直线斜率存在和不存在两种情况讨论，设 $Q(x_3,y_3),G(x_4,y_4)$，当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x+2)$，根据线 l 交双曲线的左支于 G、Q 两点求出 k 的范围，再根据弦长公式求出 $|QG|$，再根据 $\triangle GQF_2$ 周长为 $|QF_2|+|GF_2|+|QG|=4a+2|QG|$，从而可得出结论.

【小问 1 详解】

双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的两渐近线 $l_1:y=\frac{\sqrt{3}}{3}x,l_2:y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

设 $A\left(x_1,\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right),B\left(x_2,-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right),(x_1>0),P(x_0,y_0)$，

由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$，得 $\left(x_0-x_1,y_0-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1\right)=\lambda\left(x_2-x_0,-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2-y_0\right)$，

所以 $\begin{cases}x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)\\ y_0-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1=\lambda\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2-y_0\right)\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{\lambda+1}\\ y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{\lambda+1}\end{cases}$，

因为点 P 在曲线 C 上，

所以 $\frac{\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{\lambda+1}\right)^2}{3}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x_1-\lambda x_2}{\lambda+1}\right)^2=1$，整理得 $x_1x_2=\frac{3(\lambda+1)^2}{4\lambda}$，

$|OA|=\sqrt{x_1^2+\frac{1}{3}x_1^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}x_1,|OB|=\sqrt{x_2^2+\frac{1}{3}x_2^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}x_2$，

因为直线 $k_{l_1}=\frac{\sqrt{3}}{3},k_{l_2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以直线 l_1 的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{3}x_1x_2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}+2\right)$，

令 $f(x)=x+\frac{1}{x},x\in\left[\frac{1}{3},2\right]$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$，

当 $\frac{1}{3}\le x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $1<x\le 2$ 时，$f¢(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{3},1\right)$ 上递减，在 $\left(\frac{1}{3},2\right]$ 上递增，

又 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3},f(2)=\frac{5}{2}$，所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}$，

所以当$\lambda=\frac{1}{3}$时，$(S_{\triangle AOB})_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$；

【小问2详解】

$F_1(-2,0)$，设$Q(x_3,y_3),G(x_4,y_4)$，

若直线l的斜率不存在时，则$l:x=-2$，

在$\frac{x^2}{3}-y^2=1$中，令$x=-2$，得$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$|QG|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\triangle GQF_2$周长为$|QF_2|+|GF_2|+|QG|=4a+2|QG|=\frac{16\sqrt{3}}{3}$，

当直线l的斜率存在时，设直线l的方程为$y=k(x+2)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+2)\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1\end{cases}$，消$y$得$(1-3k^2)x^2-12k^2x-12k^2-3=0$，

因为直线l交双曲线的左支于G、Q两点，

所以$\begin{cases}1-3k^2\neq 0\\ \Delta=(-12k^2)^2-4(1-3k^2)(-12k^2-3)>0\\ x_3+x_4=\frac{12k^2}{1-3k^2}<0\\ x_3x_4=\frac{-12k^2-3}{1-3k^2}>0\end{cases}$，得$k^2>\frac{1}{3}$，

$\triangle GQF_2$周长为$|QF_2|+|GF_2|+|QG|=4a+2|QG|$

$$=4\sqrt{3}+2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{12k^2}{1-3k^2}\right)^2-4\cdot\frac{-12k^2-3}{1-3k^2}}$$

$$=4\sqrt{3}+2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\frac{12(k^2+1)}{(1-3k^2)^2}}$$

$$=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\cdot\frac{k^2+1}{|1-3k^2|}$$

$$=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\cdot\frac{k^2+1}{3k^2-1}$$

$$=4\sqrt{3}+4\sqrt{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}(3k^2-1)+\frac{4}{3}}{3k^2-1}$$

$$=\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3k^2-1},$$

因为$k^2>\frac{1}{3}$，所以$3k^2-1>0$，所以$\frac{16\sqrt{3}}{3}+\frac{16\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3k^2-1}>\frac{16\sqrt{3}}{3}$，

所以$\triangle GQF_2$周长的范围为$\left(\dfrac{16\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，

综上所述，$\triangle GQF_2$周长的取值范围为$\left[\dfrac{16\sqrt{3}}{3},+\infty\right]$.

22. 【答案】（1）3，理由见解析

（2）证明见解析

【解析】【分析】（1）先求导数，构造函数$h(x)=\ln x+\dfrac{2k}{x+1}-k$，利用导数研究单调性和图象的大致走势，结合零点存在定理和单调性可得答案；

（2）先找出曲线$y=f(x)$的两条切线，利用切线与$y=b$的交点证明$x_2-x_1<\dfrac{\mathrm{e}^{-3}+2+3b}{2}$，再利用割线与$y=b$的交点证明$x_2-x_1>b\mathrm{e}+1$.

【小问1详解】

当$n=1$时，$f(x)=(x+1)\ln x$，

$g(x)=(x+1)\ln x-k(x-1)=(x+1)\left(\ln x+\dfrac{2k}{x+1}-k\right)$，

显然$x=1$是$g(x)$的一个零点，

令$h(x)=\ln x+\dfrac{2k}{x+1}-k$，则$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2k}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+(2-2k)x+1}{x(x+1)^2}\ (x>0)$；

设$\varphi(x)=x^2+(2-2k)x+1\ (x>0)$，因为$k>2$，其对应方程的判别式$\Delta=4k(k-2)>0$，所以$\varphi(x)=0$有两个根，设为$x_1,x_2$，则$x_1+x_2=2k-2>0,x_1x_2=1$；

不妨设$0<x_1<1<x_2$，令$h'(x)>0$，则$x\in(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$；

令$h'(x)<0$，则$x\in(x_1,x_2)$；

所以$h(x)$在区间$(0,x_1),(x_2,+\infty)$单调递增，在区间(x_1,x_2)单调递减，

又$0<x_1<1<x_2$，所以$h(x_1)>h(1)=0>h(x_2)$；

又当x无限趋近于正无穷大时，$h(x)$也无限趋近于正无穷大；当x无限趋近于0时，$h(x)$无限趋近于负无穷大；

根据零点存在定理和函数单调性、连续性可知$h(x)$在$(0,x_1),(x_2,+\infty)$各有一个零点，所以$g(x)$总共有3个零点.

【小问2详解】

证明：先证右半部分不等式：$x_2-x_1<\dfrac{\mathrm{e}^{-3}+2+3b}{2}$；

因为$f(x)=x\ln x$，$f'(x)=\ln x+1$，

所以$f(1)=0,f(\mathrm{e}^{-3})=-3\mathrm{e}^{-3},f'(1)=1,f'(\mathrm{e}^{-3})=-2$；

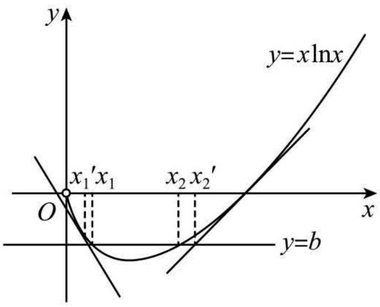
可求曲线$y=f(x)$在$x=e^{-3}$和$x=1$处的切线分别为$l_1:y=-2x-\mathrm{e}^{-3}$和$l_2:y=x-1$；

设直线 $y=b$ 与直线 l_1，函数 $f(x)$ 的图象和直线 l_2 交点的横坐标分别为 x_1', x_1, x_2, x_2'，

则 $x_1' = -\dfrac{e^{-3}+b}{2}, x_2' = b+1,$

则 $x_2 - x_1 < x_2' - x_1' = (b+1) - (-\dfrac{e^{-3}+b}{2}) = \dfrac{e^{-3}+2+3b}{2}$；

因此 $x_2 - x_1 < \dfrac{e^{-3}+2+3b}{2}$.



再证左半部分不等式：$x_2 - x_1 > be+1$.

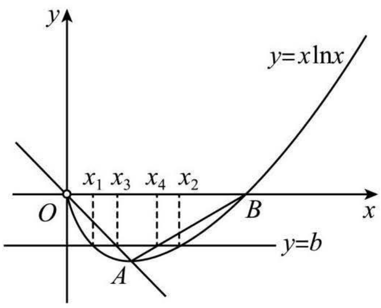
设取曲线上两点 $A(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}), B(1,0)$，

用割线 $OA: y=-x$，$AB: y=\dfrac{1}{e-1}(x-1)$ 来限制 $x_2 - x_1$，

设直线 $y=b$ 与直线 $y=-x, y=\dfrac{1}{e-1}(x-1)$ 的交点的横坐标分别为 x_3, x_4，

则 $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$，且 $x_3 = -b$，$x_4 = (e-1)b+1,$

所以 $x_2 - x_1 > x_4 - x_3 = (e-1)b+1-(-b) = be+1$.



综上可得 $be+1 < x_2 - x_1 < \dfrac{e^{-3}+2+3b}{2}$ 成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。