# 2023届“3+3+3”高考备考诊断性联考卷（二）
# 文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | D | B | D | A | B | A | A | C | C | D | C |

【解析】

1. ∵ $A=\{x\,|\,0<x\leqslant 4\}$，$\complement_U B=\{x\,|\,x\geqslant 5或x\leqslant 1\}$，∴ $(\complement_U B)\cap A=\{x\,|\,0<x\leqslant 1\}$，故选 B.

2. $\mathrm{i}^{2022}=(\mathrm{i}^2)^{1011}=-1$，所以$z=\dfrac{-1}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{-(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，则$\bar{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，故选 D.

3. 对于 A，由题图乙可知，样本中男生，女生都大部分愿意选择该门课； 对于 B，C，D，由题图甲可知，在愿意和不愿意的人中，都是男生占比较大，所以可以确定，样本中男生人数多于女生人数，故选 B.

4. 由$\begin{cases}x+y-1\leqslant 0,\\ x-y+1\geqslant 0,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 作出可行域如图 1，则 $A(-2，-1)$，$B(2，-1)$，$C(0，1)$，设点 $P(x，y)$，$D(3，3)$，其中 $P$ 在可行域内，$\therefore t=\dfrac{y-3}{x-3}=k_{PD}$，由图可知当 $P$ 在 $B$ 点时，直线 $PD$ 斜率最大，$\therefore t_{\max}=k_{DB}=4$，故选 D.

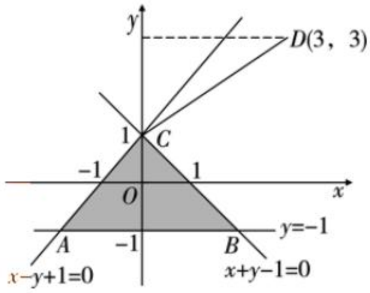

图 1

5. 由题可知，离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=2$，得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，双曲线$C$：$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的一条渐近线不妨为$y=\dfrac{a}{b}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，即$\sqrt{3}x-3y=0$，圆$x^2+(y-2)^2=4$的圆心为$(0，2)$，半径为$r=2$，可得圆心到直线的距离为$d=\dfrac{|6|}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2$，故选 A.

6. 如图 2，∵ $AB=4$，$AD=3$，$\cos\angle BAD=\dfrac{2}{3}$，∴ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\times 3\times\dfrac{2}{3}=8$，∴ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}^2+\dfrac{3}{16}\overrightarrow{AB}^2=\dfrac{1}{2}\times 8-9+\dfrac{3}{16}\times 4^2=-2$，故选 B.

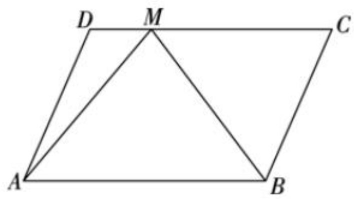

图 2

7. 由辅助角公式可得：$f(x)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$，①$f\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=2\cos 2x$，为偶函数，正确；②最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，故错误；③令 $2x+\dfrac{\pi}{6}=t,\ t\in\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}\right]$，$y=2\cos t$在区间$\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7\pi}{6}\right]$先减后增，复合函数同增异减易知，③正确；④$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，所$f(x)$关于点$\left(\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$对称，④错误，故选 A.

8. 利用三角形相似计算可得，由三角形相似可得$\dfrac{h}{a_2}=\dfrac{h_1}{a+\dfrac{a_1h_1}{h}}$，整理可得$a=\dfrac{h_1(a_2-a_1)}{h}=6$，故选 A.

9. 4 个 $A$ 和 2 个 $B$ 随机排成一行共有 15 种不同的排法，2 个 $B$ 相邻共有 5 种，∴所求概率为 $1-\dfrac{5}{15}=\dfrac{2}{3}$，故选 C.

10. 对任意 $x_1\in[1,\ 2],\ \exists x_2\in[1,\ 3]$，都有不等式 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 成立 $\Leftrightarrow f(x)_{\min}\geqslant g(x)_{\min}$，$f'(x)=e^x(x+1),\ x\in[1,\ 2],\ f'(x)>0$，∴ $f(x)$在区间$[1,\ 2]$上单调递增，$f(x)_{\min}=f(1)=e+2a$，$g'(x)=\dfrac{e(1-\ln x)}{x^2}$，$x\in[1,\ e],\ g'(x)>0$，∴$g(x)$单调递增，$x\in(e,\ 3],\ g'(x)<0$，∴$g(x)$单调递减，$g(1)=0,\ g(3)=\dfrac{e\ln 3}{3}>0$，∴$g(x)_{\min}=0$，$e+2a\geqslant 0\Rightarrow a\geqslant -\dfrac{e}{2}$，故选C.

11. 在△$ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle ACB}=2\sqrt{3}$，$AC_1=\sqrt{AC^2+CC_1^2}=\sqrt{53}$，由 $PA^2+PC_1^2=AC_1^2$ 得：$AB^2+BP^2+(7-BP)^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，解得：$BP=1$或$6$，又因为 $BB_1=7$，且 $P$ 靠近 $B$ 点，所以 $BP=1$． 由正弦定理可得，△$ABC$ 外接圆半径 $r=2$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 $R$ 满足：$R^2=r^2+\left(\dfrac{PB}{2}\right)^2=\dfrac{17}{4}$，∴外接球表面积 $S=4\pi R^2=17\pi$，故选 D.

12. $na_n=(n-1)a_{n+1}+94$ ①，则 $(n+1)a_{n+1}=na_{n+2}+94$ ②，②−①得：$(n+1)a_{n+1}-na_n=na_{n+2}-(n-1)a_{n+1}$，即 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，则数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=94$，由 $a_1+a_2+a_3=273$ 得 $a_2=91$，则公差 $d=a_2-a_1=-3$，通项 $a_n=97-3n$，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，而 $a_{32}=1,\ a_{33}=-2,\ a_{34}=-5,\ a_{35}=-8$，设 $b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}$，当 $n\leqslant 30$ 时，$b_n>0,\ b_{31}=-8,\ b_{32}=10$，当 $n\geqslant 33$ 时，$b_n<0$，显然 $b_{31}+b_{32}=2$，即数列 $\{a_na_{n+1}a_{n+2}\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的前 32 项和最大，故选 C.

二、**填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

| 题号 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | 24 | $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{5}$ |

**【解析】**

13．设$\{a_n\}$的公比为$q$，则$\begin{cases}\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=168,\\ a_1q(1-q^3)=42,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=96,\\ q=\frac{1}{2},\end{cases}$ $\therefore a_3=a_1q^2=24$．

14．$\because\theta$的终边过点$(3,\ -4)$，则$\sin\theta=-\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\therefore\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

15．$\because\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，直线$l$的斜率$k>0$，设$l$的倾斜角为$\theta$，由圆锥曲线统一的焦半径公式可

得：$\frac{p}{1-\cos\theta}=2\frac{p}{1+\cos\theta}$，解得$\cos\theta=\frac{1}{3}$，$\therefore\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．又$F(1,\ 0)$，$|AB|=|AF|+|BF|=$

$\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{9}{2}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF||FA|\sin\theta+\frac{1}{2}|OF||FB|\sin\theta=\frac{1}{2}|OF|\sin\theta|AB|=\frac{p^2}{2\sin\theta}$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}$．

16．$\because f(1+x)+f(1-x)=0$，$\therefore f(1+x)=-f(1-x)$，又$f(x)$是奇函数，$\therefore f(1+x)=f(-1+x)$，

$\therefore f(x+2)=f(x)$，$\therefore f(x)$的一个周期为 2．$\because f(2023)=f(2\times1011+1)=f(1)=R(1)=0$，

$f\left(-\frac{2023}{5}\right)=-f\left(\frac{2023}{5}\right)=-f\left(2\times202+\frac{3}{5}\right)=-f\left(\frac{3}{5}\right)=-R\left(\frac{3}{5}\right)=-\frac{1}{5}$，$\therefore f(2023)+f\left(-\frac{2023}{5}\right)$

$=-\frac{1}{5}$．

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由频率分布直方图得考核成绩低于 80 分的频率为$(0.010+0.030)\times4=0.16$，

……………………………………………………………………（3 分）

$\therefore$估计该单位职工考核成绩低于 80 分的人数为$0.16\times200=32$（人）.

……………………………………………………………………（6 分）

（2）∵前三组的频率为$(0.010+0.030+0.070)\times 4=0.44<0.5$，

前四组的频率为$(0.010+0.030+0.070+0.090)\times 4=0.80>0.5$，

∴中位数$t\in[84,\ 88]$. ……………………………………………………………（9 分）

由$0.04+0.12+0.28+0.09\times(t-84)=0.5$，得$t\approx 84.7$，

∴计该单位职工考核成绩的中位数为 84.7 分.

……………………………………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知及正弦定理，得$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{c^2}{ab}+1$，

即$a^2+b^2-c^2=ab$，……………………………………………………………（2 分）

$\therefore \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………（4 分）

又∵$C\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，∴$C=\dfrac{\pi}{3}$. ………………………………………………………（6 分）

（2）由（1）及正弦定理得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}=\dfrac{c}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$，

∵$a+b=2$，∴$\dfrac{c\sin A}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}+\dfrac{c\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=2$，……………………………………………（8 分）

$\therefore c=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)}=\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{3}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A}=\dfrac{1}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}$. ……………………（10 分）

∵$A\in\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$A+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi\right)$，

$\therefore \sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right]$，$\therefore c=\dfrac{1}{\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)}\in\left[1,\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. ……………………（12 分）

19．（本小题满分 12 分）

证明：（1）如图 3，取 $AB$ 的中点 $E$，连接 $PE$，$CE$，$AC$，

∵$AD=BC$ 且 $AD/\!/BC$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AB=CD$ 且 $AB/\!/CD$.

又 $PB=PA=CD$，∴$PA=PB=AB$，即△$PBA$ 是正三角形，

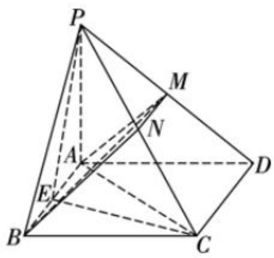

图 3

$\therefore PE \perp AB$. ……………………………………………………………………（2 分）

同理 $EC \perp AB$. …………………………………………………………………（4 分）

又 $PE \cap EC = E$，$\therefore AB \perp$ 平面 $PEC$， $\therefore AB \perp PC$ .

……………………………………………………………………………………（6 分）

（2）取 $PC$ 的中点 $N$，连接 $MN$，$BN$，

$\because M$ 是 $PD$ 的中点，$\therefore MN /\!/ CD$ .

由（1）知 $AB /\!/ CD$，$\therefore MN /\!/ AB$，$\therefore A$，$B$，$N$，$M$ 四点共面. ……………………（8 分）

$\because PB = BC$，$\therefore BN \perp PC$ .

由（1） $AB \perp PC$， ……………………………………………………………（10 分）

又 $AB \cap BN = B$，

$\therefore PC \perp$ 平面 $ABNM$，即 $PC \perp$ 平面 $ABM$. ……………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1） $f'(x) = \ln x + 1 - e^x$， ………………………………………………………（2 分）

$\therefore f'(1) = 1 - e$，又 $f(1) = 1 - e$， …………………………………………………（4 分）

$\therefore$ 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程是 $y - 1 + e = (1 - e)(x - 1)$，

即 $y = (1 - e)x$ . ……………………………………………………………………（6 分）

（2） $\because f''(x) = \dfrac{1}{x} - e^x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上递减，且 $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{e} > 0$，$f''(1) = 1 - e < 0$，

$\therefore \exists x_0 \in \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$，使 $f''(x_0) = \dfrac{1}{x_0} - e^{x_0} = 0$，即 $\ln x_0 = -x_0$ . ……………………（8 分）

当 $x \in (0,\ x_0)$ 时， $f''(x_0) > 0$，当 $x \in (x_0,\ +\infty)$ 时， $f''(x_0) < 0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上递增，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上递减， ……………………………（10 分）

$\therefore f'(x) \leqslant f'(x_0) = \ln x_0 + 1 - e^{x_0} = -\left(x_0 + \dfrac{1}{x_0}\right) + 1 < -2 + 1 = -1 < 0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上是减函数. ……………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：由椭圆 $C_2$：$x^2+16y^2=1$，得 $2b=\frac{1}{2}$，……………………………（2 分）

∴抛物线 $C_1$：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点到准线的距离 $p=\frac{1}{2}$，……………………（4 分）

故抛物线方程为 $y^2=x$．………………………………………………………………（5 分）

（2）证明：∵$D(1,\ t)$ 是抛物线 $C_1$ 上位于第一象限的点，

∴$t^2=1$ 且 $t>0$，∴$D(1,\ 1)$．…………………………………………………………（6 分）

设 $M(a^2,\ a)$，$N(b^2,\ b)$，则直线 $MN$：$y-a=\frac{1}{(a+b)}(x-a^2)$，

即 $x-(a+b)y+ab=0$，

∵直线 $DM$：$x-(a+1)y+a=0$ 与圆 $E$：$(x-2)^2+y^2=r^2$ 相切，

∴$\frac{|a+2|}{\sqrt{1+(a+1)^2}}=r$，整理可得，$(r^2-1)a^2+(2r^2-4)a+2r^2-4=0$，①

同理由直线 $DN$ 与圆 $E$ 相切可得，$(r^2-1)b^2+(2r^2-4)b+2r^2-4=0$，②…………（8 分）

由①②得 $a$，$b$ 是方程 $(r^2-1)x^2+(2r^2-4)x+2r^2-4=0$ 的两个实根，

∴$a+b=\frac{4-2r^2}{r^2-1}$，$ab=\frac{2r^2-4}{r^2-1}$，……………………………………………（10 分）

代入 $x-(a+b)y+ab=0$，化简整理可得，

$(x+2y+2)r^2-x-4y-4=0$，令 $\begin{cases}x+2y+2=0,\\-x-4y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=-1,\end{cases}$

故直线 $MN$ 恒过定点 $(0,\ -1)$．…………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 10 分）【选修 4−4：坐标系与参数方程】

解：（1）直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2-t,\\y=\sqrt{3}t,\end{cases}$ （$t$ 为参数），

消 $t$ 得直线 $l$ 的普通方程为 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$．……………………………（1 分）

∵$\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ ∴直线 $l$ 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2\sqrt{3}=0$．……………（3 分）

曲线 $C$：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的参数方程为：$\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sin\alpha,\end{cases}$ （$\alpha$ 为参数）．…………（5 分）

（2）设 $N(\sqrt{2}\cos\alpha, \sin\alpha)$，……（6 分）

则 $N$ 到直线 $l$ 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{6}\cos\alpha+\sin\alpha-2\sqrt{3}|}{2}=\dfrac{|\sqrt{7}\sin(\alpha+\varphi)-2\sqrt{3}|}{2}(\tan\varphi=\sqrt{6})$，

……（8 分）

当 $\sin(\alpha+\varphi)=1$，即 $\alpha+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，$\cos\alpha=\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，

$d_{\min}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}$，此时点 $N\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{7}, \dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)$. ……（10 分）

23．（本小题满分 10 分）【选修 4−5：不等式选讲】

解：（1）$f(x)\leqslant g(x)$，即 $|2x-3|+|x-2|\leqslant 3$，

$\therefore\begin{cases}x<\dfrac{3}{2},\\5-3x\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2,\\x-1\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x>2,\\3x-5\leqslant 3,\end{cases}$ ……（3 分）

解得 $\dfrac{2}{3}\leqslant x<\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$ 或 $2<x\leqslant\dfrac{8}{3}$，

$\therefore$ 不等式 $f(x)\leqslant g(x)$ 的解集 $N=\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{8}{3}\right]$. ……（5 分）

（2）由（1）$n=\dfrac{2}{3}$，$\therefore a+b=3n=2$，则 $a^2=(2-b)^2=b^2-4b+4$，

$b^2=(2-a)^2=a^2-4a+4$，则 $\dfrac{b^2+5}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{5}{a}=\dfrac{a^2-4a+4}{a}+\dfrac{b^2-4b+4}{b}+\dfrac{5}{a}$

$=(a+b)+\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}-8=\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}-6=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{b}\right)(a+b)-6$ ……（7 分）

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{9b}{a}+\dfrac{4a}{b}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{9b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}=\dfrac{13}{2}$，……（9 分）

当且仅当 $\dfrac{9b}{a}=\dfrac{4a}{b}$，即 $a=\dfrac{6}{5}$，$b=\dfrac{4}{5}$ 时等号成立.

$\therefore\dfrac{b^2+5}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ 的最小值为 $\dfrac{13}{2}$. ……（10 分）

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。