

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	C	A	B	C	A	D	B	A	C	B	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分。

13. 2 14. $\frac{64}{9}$ 15. $\sqrt{3}+1$ 16. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17 题-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 【解析】(1) 将图象平移至 A 与原点 O 重合，则 $A'(0,0), B'(\frac{T}{4}, 1), C'(\frac{3T}{4}, -1)$,

所以 $A'B' = (\frac{T}{4}, 1), A'C' = (\frac{3T}{4}, -1)$,

所以 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = A'B' \cdot A'C' = \frac{3T^2}{16} - 1$, 4 分

所以 $\frac{3T^2}{16} - 1 = 2$, 解得 $T = 4$,

故 $\frac{2\pi}{\omega} = 4$, 解得 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 6 分

(2) 因为 $f(2) - f(\frac{4}{3}) = \sin(\pi + \varphi) - \sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = -\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi = -\sin(\varphi + \frac{\pi}{3})$,

所以 $-\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 9 分

所以 $\varphi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ 或 $\varphi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in Z)$,

即 $\varphi = 2k\pi$ 或 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in Z)$, 11 分

又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 12 分

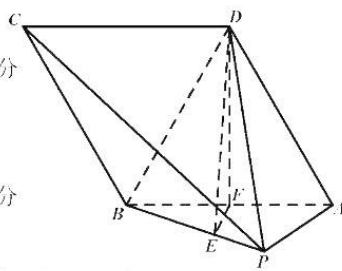
18. 【解析】(1) 如图，取 AB 的中点 F ，连接 DB, EF, DF ，

因为底面 $ABCD$ 是边长为 4 的菱形， $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$ ，

所以 $DF \perp AB$ ， 2 分

因为 $PA \perp PB$ ， $BE = 2PE$ ， $\angle PAB = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 4$ ，

所以 $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ， $BF = 2$ ，则 $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ， 4 分



所以 $BF^2 + EF^2 = BE^2$ ，则 $AB \perp EF$ ，
因为 $DF \cap DE = D$ ，所以 $AB \perp$ 平面 DEF ，
所以 $AB \perp DE$ ； 6分

(2) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ， $DF \perp AB$ ，所以 $DF \perp$ 平面 PAB ，
由题意知， $DF = 2\sqrt{3}$ ，

$$\text{所以 } V_{D-APB} = \frac{1}{3} S_{\triangle APB} \cdot DF = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4}{3}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

因为 $PF = 2$ ， $DF = 2\sqrt{3}$ ， $DF \perp PF$ ，所以 $DP = 4$ ，因为 $AD = 4$ ， $AP = 2$ ，
所以 $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15} = \sqrt{15}$ ， 10分

$$\text{所以 } V_{E-APD} = \frac{1}{3} S_{\triangle APD} \cdot d = \frac{1}{3} \times \sqrt{15} \cdot d = \frac{4}{3},$$

$$\text{所以 } d = \frac{4\sqrt{15}}{15}, \text{ 即点 } E \text{ 到平面 } PAD \text{ 的距离为 } \frac{4\sqrt{15}}{15}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

19. 【解析】(1) 由已知， $\bar{x} = 3$ ，所以 $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 10$ ，

因此，如果选择模型 $y = a + bx$ ，
则相关系数 $r_1 = \frac{47}{\sqrt{10} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ， 2分

如果选择模型 $y = a + b \ln x$ ，即 $y = a + bu$ ，
则相关系数 $r_2 = \frac{19.38}{\sqrt{1.615} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$ ， 4分

因为 $(\frac{47}{\sqrt{10}})^2 = 220.9$ ， $(\frac{19.38}{\sqrt{1.615}})^2 = 232.56$ ，
所以 $0 < r_1 < r_2$ ，故选择 $y = a + b \ln x$ 更适宜作为 y 关于 x 的回归模型。 6分

(2) 因为 $\sum_{i=1}^5 u_i \approx 4.79$ ， $\sum_{i=1}^5 y_i = 62$ ，
所以 $\bar{u} = \frac{4.79}{5} = 0.958$ ， $\bar{y} = \frac{62}{5} = 12.4$ ， 8分

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2} = \frac{19.38}{1.615} = 12, \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

所以 $a = \bar{y} - b\bar{u} = 12.4 - 12 \times 0.958 = 0.904$ ，
所以 y 关于 x 的回归方程为 $y = 0.904 + 12 \ln x$ 。 12分

20. 【解析】(1) 因为焦距 $2c = 2\sqrt{3}$, 因此 $a^2 - b^2 = 3$,
因为 $\tan \angle A_1BO = \frac{a}{b} = 2$, 2分

则 $a = 2$, $b = 1$, 所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$; 5分

(2) 因为 $A_2(2, 0)$, 所以直线 l 的方程为 $y = k(x - 2), k < -\frac{1}{2}$,

联立 $\begin{cases} y = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$, 整理得 $(4k^2 + 1)x^2 - 16k^2x + 16k^2 - 4 = 0$, 6分

则 $x_Q + 2 = \frac{16k^2}{4k^2 + 1}$, 故 $x_Q = \frac{8k^2 - 2}{4k^2 + 1}$,

则 $y_Q = k(x_Q - 2) = \frac{-4k}{4k^2 + 1}$, 所以 $Q(\frac{8k^2 - 2}{4k^2 + 1}, \frac{-4k}{4k^2 + 1})$, 8分

又直线 A_1B 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$,

联立 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases}$, 解得 $P(\frac{4k + 2}{2k - 1}, \frac{4k}{2k - 1})$, 10分

所以 $\frac{|PA_2| \cdot |MQ|}{|QA_2| \cdot |MP|} = \frac{|PA_2|}{|QA_2|} \cdot \frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{y_P \cdot x_Q}{y_Q \cdot x_P}$
 $= \frac{4k}{2k - 1} \cdot \frac{8k^2 - 2}{4k^2 + 1} = \frac{1 - 4k^2}{2k + 1} = 1 - 2k = 3$, 则 $k = -1$ 12分

21. 【解析】(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) - \ln x$, 则 $f'(x) = x - \frac{1}{x}$, 2分

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 为减函数;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 为增函数; 4分

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = 0$, 无极大值. 5分

(2) 由 $f(x) = a(x^2 - 1) - \ln x$, 则 $f'(x) = 2ax - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - 1}{x}$

因为 $f'(\frac{1}{\sqrt{2a}}) = 0$ 且 $\frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$.

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{\sqrt{2a}})$ 为减函数;

当 $x > \frac{1}{\sqrt{2a}}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{\sqrt{2a}}, +\infty)$ 为增函数;

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 又因为 $\frac{1}{\sqrt{2a}} > 1$, 所以 $f(\frac{1}{\sqrt{2a}}) < 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$, 此时 $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以必然存在 $x_0 > 1$, 使得 $f(x_0) = 0$, 8 分

即 $a = \frac{\ln x_0}{x_0^2 - 1}$, 所以 $f'(x_0) = 2 \frac{\ln x_0}{x_0^2 - 1} \cdot x_0 - \frac{1}{x_0}$

要证明 $f'(x_0) < 1 - 2a$, 即证明 $2 \frac{\ln x_0}{x_0^2 - 1} \cdot x_0 - \frac{1}{x_0} < 1 - 2 \frac{\ln x_0}{x_0^2 - 1}$

即证明 $2 \frac{\ln x_0}{x_0 - 1} - 1 - \frac{1}{x_0} < 0$, 即只要证明 $2 \ln x_0 - \frac{x_0^2 - 1}{x_0} < 0$ 10 分

设 $\varphi(x) = 2 \ln x - \frac{x^2 - 1}{x} (x > 1)$, 则 $\varphi'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$,

所以当 $x > 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为减函数:

所以 $\varphi(x) < \varphi(1) = 0$.

即 $2 \frac{\ln x_0}{x_0 - 1} - 1 - \frac{1}{x_0} < 0$, 即 $f'(x_0) < 1 - 2a$ 12 分

22. 【解析】(1) 由题意, 点 P 的极坐标为 $(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, 2 分

因为分界线 C_1 的圆心在 y 轴上, 且直径为 4,

则其直角坐标方程为 $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, 即 $x^2 + y^2 - 4y = 0 (x \geq 0)$,

可得其极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \sin \theta = 0 (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$,

即 $\rho = 4 \sin \theta (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ 5 分

(2) 由太极图的对称性可知, M, N 两点关于极点对称,

所以 $S_{\triangle PMN} = 2S_{\triangle OPM} = 2 \times \frac{1}{2} |OP| |OM| \sin \angle POM$,

设直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$,

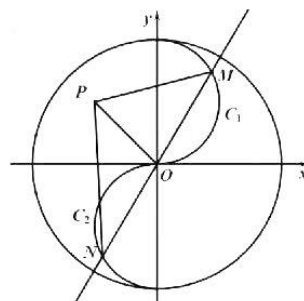
则 $M(4 \sin \alpha, \alpha)$, $\angle POM = \frac{3}{4}\pi - \alpha$,

所以 $S_{\triangle PMN} = 2S_{\triangle OPM} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4 \sin \alpha \cdot \sin(\frac{3}{4}\pi - \alpha)$

$$= 8\sqrt{2} \sin \alpha (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha)$$

$$= 4 \sin 2\alpha + 4(1 - \cos 2\alpha)$$

$$= 4\sqrt{2} \sin(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + 4,$$



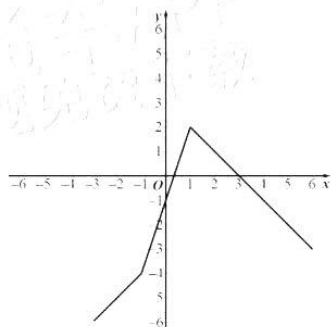
..... 8 分

因为 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, 则 $-\frac{\pi}{4} \leq 2\alpha - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$,

所以当 $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ 时, ΔPMN 面积的最大值为 $4\sqrt{2} + 4$ 10 分

23. 【解析】(1) $f(x) = |x+1| - |2x-2| = \begin{cases} x-3, & x \leq -1, \\ 3x-1, & -1 < x < 1, \\ -x+3, & x \geq 1, \end{cases}$ 3 分

其图象如下图所示:



..... 5 分

(2) 由 (1) 知函数 $f(x)$ 与 x 轴的交点为 $(\frac{1}{3}, 0)$ 和 $(3, 0)$,

结合函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象可以知道,

当 $a \leq -3$ 时, 只需 $\frac{1}{3} \leq b \leq 3$,

则 $f(x) \geq g(x)$ 在 R 上恒成立,

此时 $b - a \geq \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$, 7 分

当 $-3 < a \leq -1$ 时, 过点 $(-1, -4)$ 且斜率为 $-a$ 的直线方程为 $y = -ax - a - 4$,

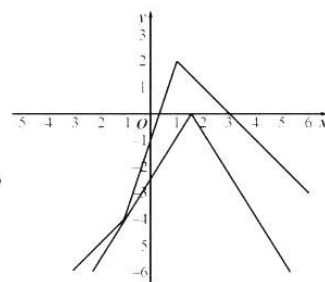
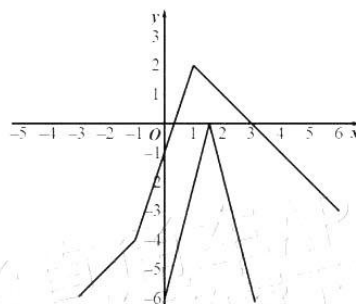
令 $y = 0$, 则 $x = -\frac{4}{a} - 1$, 要 $f(x) \geq g(x)$ 在 R 上恒成立,

则 $-\frac{4}{a} - 1 \leq b \leq 3$,

此时 $b - a \geq -\frac{4}{a} - 1 - a = -\frac{4}{a} - a - 1 \geq 2\sqrt{(-\frac{4}{a}) \times (-a)} - 1 = 3$,

当且仅当 $a = -2$ 时等号成立.

综上: $b - a$ 的最小值为 3. 10 分



① 高考直通车 APP
免费下载

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

