

2023 年长安区高三年级第一次模拟试题

理科数学

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟。

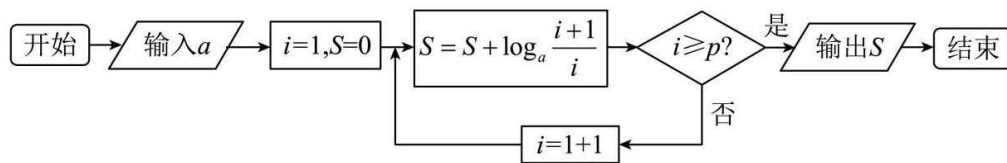
注意事项：

1. 答题前，考生务必先将自己的姓名、准考证号填写在答题纸上，认真核对条形码上的姓名、准考证号，并将条形码粘贴在答题纸上的指定位置上。
2. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整，笔迹清楚。
3. 请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。
4. 保持纸面清洁，不折叠，不破损。
5. 若做选考题时，考生应按照题目要求作答，并在答题纸上对应的题号后填写。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 复数 z 满足 $(z-3)(2-i)=5$ ，则 z 的共轭复数 \bar{z} 在复平面内对应的点位于()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 设集合 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 \leq 0\}$, $B = \{x | \log_3 x > 1\}$ ，则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = ()$
A. $[3, 4)$ B. $[-1, 3]$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, 3)$
3. 在平行四边形 $ABCD$ 中， G 为 $\triangle BCD$ 的重心， $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ ，则 $x - 2y = ()$
A. $-\frac{2}{3}$ B. 2 C. $-\frac{4}{3}$ D. 3
4. 执行如图所示的程序框图.如果输入的 a 为 2，输出的 S 为 4，那么 $p = ()$

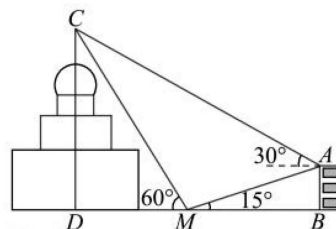


- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16
5. 某兴趣小组由 2 名男同学与 3 名女同学组成，他们完成一项活动后，要从这 5 名同学中选 2 人写活动体会，则所选男生人数不少于 1 名的概率为()
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{10}$

6. 若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, 且 $\cos^2 \alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = (\quad)$

- A. $-\sqrt{3}$ B. -1 C. 1 D. 2

7. 圣·索菲亚教堂坐落于中国黑龙江省, 是一座始建于 1907 年拜占庭风格的东正教教堂, 被列为第四批全国重点文物保护单位, 其中央主体建筑集球圆柱, 棱柱于一体, 极具对称之美, 可以让游客从任何角度都能领略它的美. 如图, 小明为了估算索菲亚教堂的高度, 在索菲亚教堂的正东方向找到一座建筑物 AB , 高为 $6m$, 在它们之间的地面上的点 M



(B, M, D 三点共线) 处测得楼顶 A , 教堂顶 C 的仰角分别是 15° 和 60° , 在楼顶 A 处测得塔顶 C 的仰角为 30° , 则小明估算索菲亚教堂的高度约为(取 $\sqrt{3} \approx 1.7$)(\quad)

- A. $24.2m$ B. $28.2m$ C. $33.5m$ D. $46.4m$

8. 设 $a > b > 0, a + b = 1$ 且 $x = -\left(\frac{1}{a}\right)^b, y = \log_{\frac{1}{b}} a, z = \log_{\left(\frac{1}{a+b}\right)} ab$, 则 x, y, z 的大小关系是(\quad)

- A. $x < z < y$ B. $z < y < x$ C. $y < z < x$ D. $x < y < z$

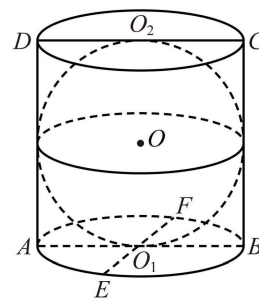
9. 已知函数 $f(x) = \cos(3x + \varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称, 则下列说法正确的是(\quad)

- A. 函数 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 为偶函数 B. 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

C. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$

D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $y = -\cos 3x$ 的图象

10. 传说古希腊数学家阿基米德的墓碑上刻着一个圆柱, 圆柱内有一个内切球, 这个球的直径恰好与圆柱的高相等.“圆柱容球”是阿基米德最为得意的发现; 如图是一个圆柱容球, O_1, O_2 为圆柱上下底面的圆心, O 为球心, EF 为底面圆 O_1 的一条直径, 若球的半径 $r = 2$, 则下列说法**错误**的是(\quad)



- A. 球与圆柱的表面积之比为 $\frac{2}{3}$
- B. 四面体 $CDEF$ 的体积的取值范围为 $\left(0, \frac{32}{3}\right]$
- C. 若 P 为球面和圆柱侧面的交线上一点, 则 $PE+PF$ 的取值范围为 $[2+2\sqrt{5}, \sqrt{3}]$
- D. 平面 DEF 截得球的截面面积最小值为 $\frac{13}{5}\pi$
11. 点 A, B 为抛物线 $C: x^2 = 2py$ 上的两点, F 是抛物线 C 的焦点, 若 $\angle AFB = 60^\circ$, AB 中点 D 到抛物线 C 的准线的距离为 d , 则 $\frac{|AB|}{d}$ 的最小值为()
- A. 2 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{2}$
12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$, 则下列说法正确的是()
- A. $f(0) = 1$ B. $f'(x)$ 必为偶函数
- C. $f(x) + f(0) > 0$ D. 若 $f(1) = \frac{1}{2}$, 则 $\sum_{n=1}^{2023} f(n) = \frac{1}{2}$

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卷中相应的横线上)

13. $(x+1)\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^7$ 的展开式中 x^4 的系数为_____. (请用数字作答)
14. 直线 $l: mx - y + 2 - 3m = 0 (m \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2 + y^2 - 2y - 15 = 0$ 交于两点 P, Q , 则弦长 $|PQ|$ 的最小值是_____.
15. 若函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值的和为_____.
16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上一点 A , 它关于原点的对称点为 B , 点 F 为椭圆右焦点, 且满足 $AF \perp BF$, 设 $\angle ABF = \alpha$, 且 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$, 则该椭圆的离心率的取值范围是_____.

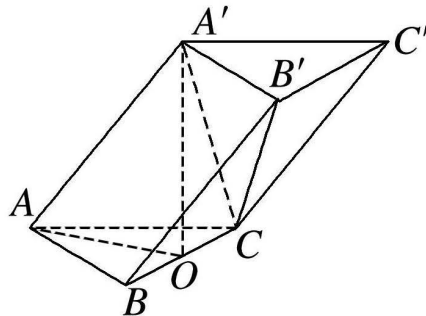
三、解答题：(共 7 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答)

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 满足 $a_1=100$, $a_{n+1}=a_n^2$, $b_n=\lg a_n$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式; (2) 若 $c_n = \log_2 b_n + \log_2 b_{n+1} + \dots + \log_2 b_{2n}$, 求数列 $\left\{\frac{1}{c_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分) 在斜三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形, 侧棱 $AA'=2\sqrt{3}$, 顶点 A' 在平面 ABC 的射影为 BC 边的中点 O .



(1) 求证: 平面 $BCC'B' \perp$ 平面 AOA' ;

(2) 求平面 ABC 与平面 $A'B'C$ 所成锐二面角的余弦值.

19. (本小题满分 12 分) 某公司计划在 2023 年年初将 200 万元用于投资, 现有两个项目供选择.

项目一: 新能源汽车. 据市场调研, 投资到该项目上, 到年底可能获利 30%, 也可能亏损 15%, 且这两种情况发生的概率分别为 $\frac{7}{9}$ 和 $\frac{2}{9}$;

项目二: 通信设备. 据市场调研, 投资到该项目上, 到年底可能获利 50%, 可能损失 30%,

也可能不赔不赚, 且这三种情况发生的概率分别为 $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$.

(1) 针对以上两个投资项目, 请你为投资公司选择一个合理的项目, 并说明理由;

(2) 若市场预期不变, 该投资公司按照(1)中选择的项长期投资(每一年的利润和本金继续用作投资), 问大约在哪一年的年底总资产(利润+本金)可以翻两番?(参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$)

20. (本小题满分 12 分) 数学家加斯帕尔·蒙日创立的《画法几何学》对世界各国科学技术的发展

影响深远. 在双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 中, 任意两条互相垂直的切线的交点都在同一个圆上,

它的圆心是双曲线的中心, 半径等于实半轴长与虚半轴长的平方差的算术平方根, 这个圆被称为蒙日圆. 已知双曲线 C 的实轴长为 $2\sqrt{6}$, 其蒙日圆方程为 $x^2 + y^2 = 4$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 设点 $P(3,1)$ 关于坐标原点的对称点为 Q , 过点 P 且斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线与双曲线 C 相交于 M, N 两点, 直线 PM 与 QN 交于点 $D(x_0, y_0)$, 求直线 OD 的斜率值.

21. (本小题满分 12 分) 已知 $f(x) = \frac{e^{x-1}}{ax} - x + \ln x$.

(1) 当 $a = \frac{1}{e}$ 时, 求 $f(x)$ 的单调区间; (2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题做答, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 并请考生务必将答题卡中对所选试题的题号进行涂写.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 3\cos\varphi \\ y = 3\sin\varphi \end{cases}$ (φ 为参数).

以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 已知直线 l 的极坐标方程为

$$2\rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = m - 2\sqrt{3}.$$

(1) 写出直线 l 的参数方程及曲线 C 的普通方程;

(2) 设点 $P(2, m)$, 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$, 求实数 m 的值.

23. [选修 4—5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

设函数 $f(x) = |x - a^2 - 2| + |x - a|, x \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) > 8$ 的解集;

(2) 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 恒有 $f(x) \geq 5 - a$, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

