2023届高三年级5月份大联考

数学参考答案及解析

一、单选题

1. B　【解析】因为 $A=\{2,4\}$，$B=\{x\mid -2<x<3\}$，$A\cap B=\{2\}$. 故选 B.

2. B　【解析】$z=2+\mathrm{i}$，$\therefore P(2,1)$，$\bar{z}=2-\mathrm{i}$，$\therefore Q(2,-1)$，$\mathrm{i}z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})=-1+2\mathrm{i}$，$\therefore R(-1,2)$. 故选 B.

3. C　【解析】由已知 $BF=3EF=3$，得 $EF=1$，$BE=2$，$AE=3$，又 $AE\perp BE$，所以 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，因为 $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}$，所以 $(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{CF})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$，又 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BC}|^2=13$. 故选 C.

4. A　【解析】因为 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数 $g(x)$ 和奇函数 $h(x)$ 的和，即 $f(x)=g(x)+h(x)$，$f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)$，所以 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2-\cos x+\sin x}{2+\cos x}+\dfrac{2-\cos x-\sin x}{2+\cos x}\right)=\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}$，所以 $g(x)=\dfrac{2-\cos x}{2+\cos x}=\dfrac{4}{2+\cos x}-1\in\left[\dfrac{1}{3},3\right]$. 故选 A.

5. C　【解析】令函数 $f(x)=x-\cos x$，则 $f'(x)=1+\sin x\geqslant 0$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以函数 $f(x)=x-\cos x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $x>y\Leftrightarrow f(x)>f(y)\Leftrightarrow x-\cos x>y-\cos y\Leftrightarrow x-y>\cos x-\cos y$. 故选 C.

6. C　【解析】因为 $(x+1)^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6=x^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6+2x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$，$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 展开的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r=(-1)^r C_6^r x^{6-2r}$，所以令 $6-2r=2\Rightarrow r=2$，得展开式中 x^2 的系数为 $2C_6^2=30$. 故选 C.

7. C　【解析】设椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1(a_1>b_1>0)$，双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a_2^2}-\dfrac{y^2}{b_2^2}=1(a_2,b_2>0)$，且设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，由椭圆的定义得 $m+n=2a_1$　①，由双曲线的定义得 $|m-n|=2a_2$　②，①^2+②^2 得，$m^2+n^2=2(a_1^2+a_2^2)$，①^2−②^2 得，$mn=a_1^2-a_2^2$，由余弦定理可得 $(2c)^2=m^2+n^2-2mn\cos\angle F_1PF_2$，所以 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$，设 $a_1=2c\cos\theta$，$a_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c\cdot\sin\theta$，所以 $\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}=\dfrac{a_1}{c}+\dfrac{a_2}{c}=2\cos\theta+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$，当 $\theta+\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ 时，$\dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2}$ 取最大值为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

8. B　【解析】由 $a=\sin\dfrac{1}{\pi}$，$b=\sqrt[\pi]{\pi}-1$，$c=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^2+\dfrac{1}{\pi}$，令 $f(x)=\pi^x-1-\sin x$，$g(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}x^2-x$，$x\in(0,1)$，$f'(x)=\pi^x\ln\pi-\cos x$，当 $0<x<1$ 时，因为 $\pi^x\ln\pi>1$，$\cos x<1$，所以 $f'(x)=\pi^x\ln\pi-\cos x>0$，所以函数 $f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，所以 $\pi^x-1>\sin x$；$g'(x)=\cos x+x-1$，令 $\varphi(x)=g'(x)=\cos x+x-1$，则 $\varphi'(x)=1-\sin x>0$，所以 $\varphi(x)=g'(x)$ 单调递增，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，所以函数 $g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)>$

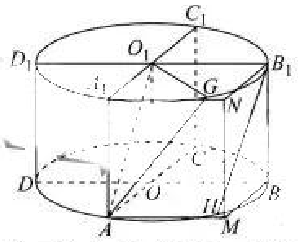
$g(0)=0$，所以 $\sin x>-\frac{1}{2}x^2+x$，综上：当 $x\in(0,1)$时，$\pi^x-1>\sin x>-\frac{1}{2}x^2+x$；$x=\frac{1}{\pi}$时，得 $\sqrt[\pi]{\pi}-1>\sin\frac{1}{\pi}>-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi}$，即 $b>a>c$. 故选 B.来源：高三答案公众号

二、多选题

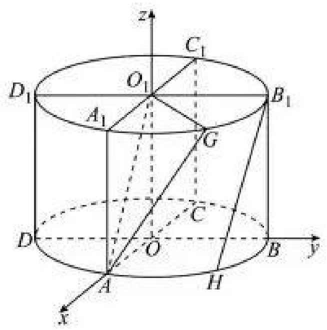
9. AD 【解析】数列$\{a_n\}$为递增数列，$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2\,023}<a_{2\,024}$. 对于 A，因为 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2\,023}<a_{2\,024}$，所以中位数为$\frac{a_{1\,012}+a_{1\,013}}{2}$，故 A 正确；对于B，数据 $a_1+2,a_2+2,a_3+2,\cdots,a_{2\,023}+2$ 的均值为 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{2\,023}(a_i+2)}{2\,023}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{2\,023}a_i}{2\,023}+2=m+2$，故B错误；对于C，不妨令 $a_n=n(n=1,2,\cdots,2\,023)$，则 $m=1\,012=a_{1\,012}$，故C错误；对于D，数据$2a_1+1,2a_2+1,2a_3+1,\cdots,2a_{2\,023}+1$的均值为$\frac{\sum\limits_{i=1}^{2\,023}(2a_i+1)}{2\,023}=\frac{2\sum\limits_{i=1}^{2\,023}a_i}{2\,023}+1=2m+1$，其方差为$\frac{\sum\limits_{i=1}^{2\,023}[(2a_i+1)-(2m+1)]^2}{2\,023}=\frac{4\sum\limits_{i=1}^{2\,023}(a_i-m)^2}{2\,023}=4s^2$，所以新数据：$2a_1+1,2a_2+1,2a_3+1,\cdots,2a_{2\,023}+1$ 的标准差为 $2s$，故 D正确. 故选AD.

10. BCD 【解析】$f(x)=\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin 13x}{13}$. 对于 A，$\because f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{1}+\frac{\sin 3(x+\pi)}{3}+\frac{\sin 5(x+\pi)}{5}+\cdots+\frac{\sin 13(x+\pi)}{13}=-f(x)$，$\therefore\pi$不是 $f(x)$的周期，故 A 错误；对于 B，$\because f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{1}+\frac{\sin(-3x)}{3}+\frac{\sin(-5x)}{5}+\cdots+\frac{\sin(-13x)}{13}=-f(x)$，$\therefore f(x)$为奇函数，故 B 正确；对于 C，$\because f(x+\pi)=-f(x)$，且$f(x)$为奇函数，$\therefore f(x+\pi)=f(-x)$，$\therefore f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称，故C正确；对于 D，$\because f'(x)=\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos 13x$，当 $x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$\cos nx=1(n=1,3,5,\cdots,13)$，$\therefore f'(x)$取最大值 7，故 D 正确. 故选 BCD.

11. BC 【解析】如图，将三棱柱 $A_1O_1B_1-AOB$ 补全为一个正方体 $O_1A_1NB_1-OAMB$，对于 A，因为 $O_1A\,/\!/\,B_1M$，若 $B_1H\,/\!/\,O_1A$，则有 $B_1H\,/\!/\,B_1M$，显然矛盾，故 A 不成立；

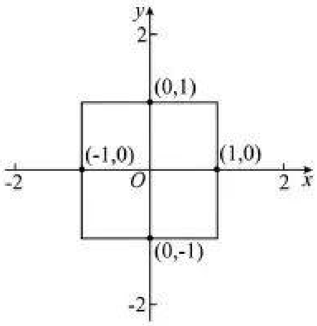


对于 B，因为正方体 $O_1A_1NB_1-OAMB$ 中，$B_1B\perp$面 $O_1A_1NB_1$，所以 $B_1B\perp O_1G$. 所以当 B，H 重合时，有 $B_1H\perp O_1G$，故 B 成立；对于 C，因为 OA，OB，OO_1 两两相互垂直，所以以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OO_1}$分别为 x、y、z 轴正方向建立如下图所示的空间直角坐标系.



则 $O(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B_1(0,2,2)$，$B(0,2,0)$，$O_1(0,0,2)$，$A_1(2,0,2)$，$G(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$，$H(m,n,0)(m^2+n^2=4,m>0,n>0)$，所以 $\overrightarrow{O_1A}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{O_1G}=(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{B_1H}=(m,n-2,-2)$. 设 $\boldsymbol{e}=(x,y,z)$ 为平面 O_1AG 的一个法向量，则 $\begin{cases}\overrightarrow{O_1A}\cdot\boldsymbol{e}=0\\ \overrightarrow{O_1G}\cdot\boldsymbol{e}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2z=0\\ \sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\boldsymbol{e}=(1,-1,1)$. 假设 $B_1H\,/\!/$ 平面 O_1AG，则 $\boldsymbol{e}\cdot\overrightarrow{B_1H}=m-n+2-2=0$，所以 $m=n$. 因为 $m^2+n^2=4$，$m>0$，$n>0$，所以 $m=n=\sqrt{2}$，即 H 是圆弧 $\widehat{AB}$ 的中点，符合题意. 故 C 成立；对于 D，因为 $BB_1\,/\!/\,OO_1$，所以 $\angle HB_1B$(或其补角)为 B_1H 与 O_1O 所成的角，在直角 $\triangle HBB_1$ 中，$\tan\angle HB_1B=\frac{HB}{BB_1}=\frac{HB}{2}\leqslant\sqrt{2}<\sqrt{3}=\tan 60°$，所以不存在点 H，使得 B_1H 与 O_1O 所成的角为 $60°$，故 D 不成立. 故选 BC.

12. ABC 【解析】对于 A，根据三角形两边之和大于第三边，得 $d_1(O,M)+d_1(O,N)\geqslant d_1(M,N)$，故 A 正确；对于 B，$d_2(O,M)=|x_1|+|y_1|$，$d_2(O,N)=|x_2|+|y_2|$，$d_2(M,N)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，$d_2(O,M)+d_2(O,N)=|x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|\geqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|=d_2(M,N)$，故 B 正确；对于 C，$d_3(O,P)=1$，$\max\{|x|,|y|\}=1$，即 $\begin{cases}|x|=1\\|y|\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|y|=1\\|x|\leqslant1\end{cases}$，即 $\begin{cases}|x|=1\\-1\leqslant y\leqslant1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|y|=1\\-1\leqslant x\leqslant1\end{cases}$，所以点 P 的轨迹为以 O 为中心，坐标轴为对角线，且边长为 2 的正方形(如图)，故 C 正确；

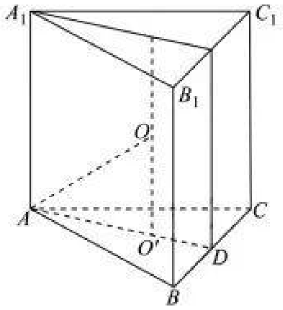


对于 D，$d_4(O,P)=1$，$(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^2=1$，曲线 $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=1$ 过点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$，但是点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 不在以 O 为圆心，半径为 1 的圆上，故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题

13. $-\frac{4}{3}$ 【解析】由 $\frac{2}{\cos 2\theta}+\tan 2\theta=2$，$2+\sin 2\theta=2\cos 2\theta$，得 $2+2\sin\theta\cos\theta=2(1-2\sin^2\theta)$，所以 $\sin\theta\cos\theta=-2\sin^2\theta$. 又因为 $\theta\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，则 $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4}{3}$，故答案为 $-\frac{4}{3}$.

14. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$ 【解析】设正三棱柱为 $ABC-A_1B_1C_1$，它的内切球、外接球的球心均为 O，正三棱柱的内切球的表面积为 4π，内切球的半径为 1，内切球与正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有面都相切，所以正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 底面内切圆的半径为 1，棱柱高为 2，设底面 ABC 内切圆的圆心为 O'，BC 的中点为 D，则 O' 在 AD 上，且 $O'D=1$，$\therefore AO'=2$，又 $OO'=1$，则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的半径为 $OA=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，即外接球的体积为 $\frac{4\pi\times(\sqrt{5})^3}{3}=\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.

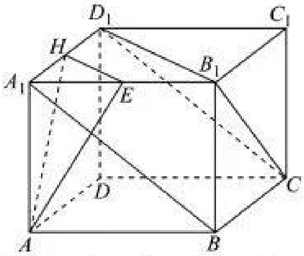


15. $\frac{\sqrt{5}}{5}$(答案不唯一) 【解析】因为向量 $\boldsymbol{m}=(1,-2)$,动点 P 满足 $\overrightarrow{PQ}/\!/\boldsymbol{m}$,所以动点 P 的轨迹为直线,方程为 $l:2x+y-3=0$,满足 $||PF_1|-|PF_2||=2a(0<a<1)$ 的动点 P 的轨迹为以 F_1,F_2 为焦点的双曲线 C,有且只有一个点 P 满足 $||PF_1|-|PF_2||=2a(0<a<1)$,即直线 $l:2x+y-3=0$ 与双曲线 C 有且只有一个公共点,当直线 l 与 C 的渐近线平行时,即当 C 的方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{5}}-\frac{y^2}{\frac{4}{5}}=1$ 时,直线 l 与双曲线 C 有且只有一个公共点,此时 $a=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$(答案不唯一).

16. $\frac{19}{40}$;$\frac{3}{19}$ 【解析】以 T 记事件"将卡片投掷3次每次都出现乾字",以 A 记事件"所取到的是正品",由题设 $P(A)=\frac{3}{5}$,$P(\overline{A})=\frac{2}{5}$,$P(T|A)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$,$P(T|\overline{A})=1$,①由全概率公式得,$P(T)=P(T|A)P(A)+P(T|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{19}{40}$. ②所求的概率为 $P(A|T)=\frac{P(AT)}{P(T)}=\frac{\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}}{\frac{19}{40}}=\frac{3}{19}$. 故答案为 $\frac{19}{40}$;$\frac{3}{19}$.

四、解答题

17. 解:(1)连接 BA_1,因为 $BC/\!/D_1A_1$,$BC=D_1A_1$,所以四边形 BCD_1A_1 为平行四边形,所以 $CD_1/\!/BA_1$,因为 $AE\perp CD_1$,所以 $AE\perp BA_1$. (2分)



因为 $\angle AA_1B+\angle A_1AE=90^\circ$,$\angle A_1AE+\angle A_1EA=90^\circ$,来源:高三答案公众号

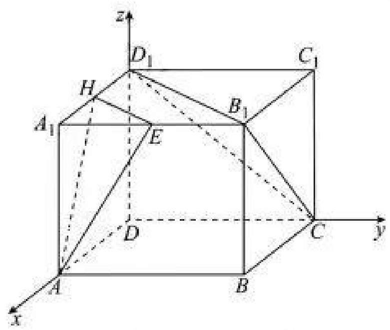
所以 $\angle AA_1B=\angle A_1EA$,所以 $\triangle BAA_1\sim\triangle AA_1E$,

所以 $\frac{A_1E}{AA_1}=\frac{AA_1}{AB}$,所以 $AA_1^2=A_1E\cdot AB=1\times2=2$,

所以 $AA_1=\sqrt{2}$. (4分)

所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=AB\times AD\times AA_1=4\sqrt{2}$. (5分)

(2)以 D 为坐标原点,分别以 DA、DC、DD_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(2,0,0)$,$E(2,1,\sqrt{2})$,$H(1,0,\sqrt{2})$,$C(0,2,0)$,$B_1(2,2,\sqrt{2})$,$D_1(0,0,\sqrt{2})$, (6分)

设平面 AEH 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

$\overrightarrow{AE}=(0,1,\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AH}=(-1,0,\sqrt{2})$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$,$\begin{cases}y+\sqrt{2}z=0\\ -x+\sqrt{2}z=0\end{cases}$ 令 $z=1$,则 $x=\sqrt{2}$,

$y=-\sqrt{2}$，

则平面 AEH 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$.　(8 分)

设平面 CB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\overrightarrow{CB_1}=(2,0,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{CD_1}=(0,-2,\sqrt{2})$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0\end{cases}$ $\begin{cases}2x_1+\sqrt{2}z_1=0\\ -2y_1+\sqrt{2}z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=1$，则 $z_1=\sqrt{2}$，$x_1=-1$，

则平面 CB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(-1,1,\sqrt{2})$.

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

所以平面 AEH 与平面 CB_1D_1 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.　(10 分)

18. **解**：(1) $\because a\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}b\cos(C+B)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}b$，

$\therefore$ 由正弦定理可得，$\sin A\sin B+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\cos(B+C)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B$，　(2 分)

$\therefore \sin A\sin B-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin B$，　(3 分)

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \sin\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，　(4 分)

$\because A$ 为锐角，$\therefore A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.　(5 分)

(2) 选条件①：设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $2R=\dfrac{BC}{\sin A}=2\sqrt{3}$，即 $R=\sqrt{3}$，　(6 分)

由题意知：$BM=CM=\sqrt{3}$，$BC=3$，所以 $\angle BMC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle MBD=\dfrac{\pi}{6}$.来源：高三答案公众号　(8 分)

在 $\triangle BDM$ 中，由正弦定理知：$\sin\angle BDM=\dfrac{BM}{MD}\sin\angle MBD=1$，

所以 $\angle BDM=\dfrac{\pi}{2}$，　(9 分)

从而 $MD\perp BC$，所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 3^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.　(12 分)

选条件②：由条件知：$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle A=\dfrac{\pi}{6}$，　(6 分)

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，得 $\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{\pi}{6}$.　(7 分)

因为 $AD=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}bc=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}(b+c)$，

即 $b+c=\dfrac{2bc}{3}$，　(8 分)

由余弦定理得：$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，$b^2+c^2-9=bc$，即 $(b+c)^2-3bc=9$，

所以 $\left(\dfrac{2bc}{3}\right)^2-3bc-9=0$，$4(bc)^2-27bc-81=0$，

即 $(4bc+9)(bc-9)=0$，

又因为 $bc>0$，所以 $bc=9$，　(9 分)

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times 9\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.　(12 分)

19. **解**：(1) Y 的可能取值为 1、2、3，　(1 分)

$P(Y=1)=\dfrac{1}{3}$，　(2 分)

$P(Y=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$, （3 分）

$P(Y=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}$, （4 分）

所以 Y 的分布列为 来源：高三答案公众号

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（6 分）

$E(Y)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}=2$. （8 分）

(2)$P(X=1)=\frac{1}{3}$, （9 分）

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$. （10 分）

则 $P(X<Y)=P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=1)\times P(Y=3)+P(X=2)\times P(Y=3)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}$. （12 分）

20. 解：(1) 由已知，$P_n\left(a_n,\frac{2a_n}{a_n+1}\right)$，从而有 $Q_n\left(a_{n+1},\frac{2a_n}{a_n+1}\right)$, （2 分）

因为 Q_n 在 $y=\frac{1}{3x}$ 上，所以有 $\frac{2a_n}{a_n+1}=\frac{1}{3a_{n+1}}$,

所以 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n}$. （4 分）

(2)由 $a_{n+1}=\frac{a_n+1}{6a_n}$，可得 $a_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{a_n+1}{6a_n}-\frac{1}{2}=\frac{-2\left(a_n-\frac{1}{2}\right)}{6a_n}$, $a_{n+1}+\frac{1}{3}=\frac{a_n+1}{6a_n}+\frac{1}{3}=\frac{3\left(a_n+\frac{1}{3}\right)}{6a_n}$,

两式相除得 $\frac{a_{n+1}-\frac{1}{2}}{a_{n+1}+\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}$，又 $\frac{a_1-\frac{1}{2}}{a_1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$, （6 分）

所以 $\left\{\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{4}$ 为首项，$-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，

所以 $\frac{a_n-\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，解得 $a_n=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$. （8 分）

(3)令 $u=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，可知 n 为偶数时，$n-1$ 为奇数，$\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\in\left[-\frac{2}{3},0\right)$；$n$ 为奇数时，$n-1$ 为偶数，$\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\in(0,1]$，即 $u\in\left[-\frac{2}{3},0\right)\cup(0,1]$. （10 分）

令 $a_n=f(u)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{12}u}{1+\frac{1}{4}u}=\frac{-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}u\right)+\frac{5}{6}}{1+\frac{1}{4}u}=-\frac{1}{3}+\frac{\frac{5}{6}}{1+\frac{1}{4}u}$，可知 $1+\frac{1}{4}u\in\left[\frac{5}{6},1\right)\cup\left(1,\frac{5}{4}\right]$，$\therefore a_n\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$，$\therefore\lambda\geqslant\frac{2}{3}$，

即 $\lambda\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$. （12 分）

21. 解：(1)将点 $(4,2)$ 代入抛物线方程，可得 $4p=16$，

解得 $p=4$，

所以抛物线的方程为 $x^2=8y$. （2 分）

则抛物线的准线方程为 $l:y=-2$. （3 分）

(2)设点 $A(x_0,y_0)(y_0<0)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，

设 $D(0,m)$，则 B、D、C 三点共线，向量 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CD}$ 平行，

$\overrightarrow{BD}=(-x_1,m-y_1)=\left(-x_1,m-\dfrac{x_1^2}{8}\right)$,

$\overrightarrow{CD}=\left(-x_2,m-\dfrac{x_2^2}{8}\right)$,

则 $-x_1\left(m-\dfrac{x_2^2}{8}\right)=-x_2\left(m-\dfrac{x_1^2}{8}\right)$, $m=-\dfrac{x_1x_2}{8}$,

$\therefore D\left(0,-\dfrac{x_1x_2}{8}\right)$.　　(5 分)

由 $x^2=8y$,得 $y=\dfrac{x^2}{8}$,所以 $y'=\dfrac{x}{4}$,

所以直线 AB 的方程为:$y-y_1=\dfrac{x_1}{4}(x-x_1)$,

即 $y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8}$,

联立直线 AB 与准线 l 的方程 $\begin{cases}y=\dfrac{x_1}{4}x-\dfrac{x_1^2}{8}\\ y=-2\end{cases}$,得所以 $P\left(\dfrac{x_1^2-16}{2x_1},-2\right)$,　　(6 分)

又因为直线 AB 过点 A,所以 $y_0=\dfrac{x_1}{4}x_0-\dfrac{x_1^2}{8}$,

即 $x_1^2-2x_1x_0+8y_0=0$,

同理,直线 AC 的方程为 $y=\dfrac{x_2}{4}x-\dfrac{x_2^2}{8}$,

$Q\left(\dfrac{x_2^2-16}{2x_2},-2\right)$, $x_2^2-2x_2x_0+8y_0=0$,

因为 $\begin{cases}x_1^2-2x_1x_0+8y_0=0\\ x_2^2-2x_2x_0+8y_0=0\end{cases}$,所以 x_1,x_2 是方程 $x^2-2x_0x+8y_0=0$ 的两根,所以

$\begin{cases}x_1+x_2=2x_0\\ x_1x_2=8y_0\end{cases}$　　(8 分)

所以 $D(0,-y_0)$. 又 $A(x_0,y_0)$,则直线 AD 的方程为 $y+y_0=\dfrac{2y_0}{x_0}x$,令 $y=-2$ 得

$M\left(\dfrac{x_0(y_0-2)}{2y_0},-2\right)$,　　(10 分)

因为 $P\left(\dfrac{x_1^2-16}{2x_1},-2\right)$, $Q\left(\dfrac{x_2^2-16}{2x_2},-2\right)$,

$M\left(\dfrac{x_0(y_0-2)}{2y_0},-2\right)$,

$$\frac{x_P+x_Q}{2}=\frac{\dfrac{x_1^2-16}{2x_1}+\dfrac{x_2^2-16}{2x_2}}{2}$$

$$=\frac{x_1^2x_2-16x_2+x_1x_2^2-16x_1}{4x_1x_2}$$

$$=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)-16(x_1+x_2)}{4x_1x_2}=\frac{x_0(y_0-2)}{2y_0}=x_M,$$

所以 M 为 PQ 中点,所以 $|MP|=|MQ|$.　(12 分)

22. 解:(1)由题意可知:$f(x)=\dfrac{1+a\ln x}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{a-1-a\ln x}{x^2}$,　　(1 分)

当 $a=0$ 时,则 $f'(x)=\dfrac{a-1-a\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}<0$,对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为单调递减函数,无极大值;　　(2 分)

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,可得 $a-1-a\ln x>0$,则 $\ln x<\dfrac{a-1}{a}$,解得 $0<x<e^{\frac{a-1}{a}}$;

令 $f'(x)<0$,解得 $x>e^{\frac{a-1}{a}}$,故 $f(x)$ 在 $(0,e^{\frac{a-1}{a}})$ 上单调递增,在 $(e^{\frac{a-1}{a}},+\infty)$ 上单调递减;

所以 $f(x)$ 有极大值 $f(e^{\frac{a-1}{a}})$, $f(e^{\frac{a-1}{a}})=\dfrac{a}{e^{\frac{a-1}{a}}}=1$,

所以 $a=e^{\frac{a-1}{a}}$,　　(3 分)

即 $\ln a=1-\dfrac{1}{a}$,可得 $\ln\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}+1=0$,　　(4 分)

令 $h(x)=\ln x-x+1$,则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$,

令 $h'(x)>0$,解得 $0<x<1$;令 $h'(x)<0$,解得 $x>1$;

则 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$,单调递减区间为 $(1,+\infty)$,

所以 $h(x)\leqslant h(1)=0$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

故方程 $\ln\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1=0$ 的唯一解为 $a=1$.　(5 分)

(2) $g(x)=x^2[1-f(x)]+x-1=-x\ln x+x^2-1$，$x\in(0,+\infty)$，

所以 $g'(x)=-\ln x+2x-1$，　(6 分)

令 $u(x)=-\ln x+2x-1$，则 $u'(x)=-\frac{1}{x}+2=\frac{2x-1}{x}$，

当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$u'(x)>0$；当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$u'(x)<0$；

则 $u(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $u(x)\geqslant u\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2>0$，即 $g'(x)>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，　(7 分)

因为 $g(1)=0$，所以 $0<x<1$ 时，$g(x)<0$；$x>1$ 时，$g(x)>0$.　(8 分)

不妨设 $m<n$，则 $g(m)<g(n)$，

又因为 $g(m)+g(n)<0$，所以 $g(m)<0$，所以 $0<m<1$.

①当 $0<n\leqslant 1$ 时，则 $mn<1$ 成立；　(9 分)

②当 $n>1$ 时，若 $mn\geqslant 1$，则 $m\geqslant\frac{1}{n}$，所以 $g(m)\geqslant g\left(\frac{1}{n}\right)$，

则 $g(m)+g(n)\geqslant g\left(\frac{1}{n}\right)+g(n)=\left(-n+\frac{1}{n}\right)\left(\ln n-n+\frac{1}{n}\right)$，

由 $n>1$，可得 $-n<-1$，$0<\frac{1}{n}<1$，所以 $-n+\frac{1}{n}<0$，　(10 分)

令 $\varphi(x)=\ln x-x+\frac{1}{x}$，$x\in(1,+\infty)$，则

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+x-1}{x^2}=\frac{-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{x^2}$，

所以 $\varphi'(x)<0$ 对 $x\in(1,+\infty)$ 恒成立，

则 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $\varphi(x)<\varphi(1)=0$，

所以 $\ln n-n+\frac{1}{n}<0$ 对 $n\in(1,+\infty)$ 恒成立，　(11 分)

则 $\left(-n+\frac{1}{n}\right)\left(\ln n-n+\frac{1}{n}\right)>0$，

即 $g(m)+g(n)>0$，与 $g(m)+g(n)<0$ 矛盾，

所以 $mn<1$.

综上，$mn<1$.　(12 分)