机密★启用前(新高考卷)

华大新高考联盟2022年名校高考押题卷

数　学

扫码关注　查询成绩

命题单位:华中师范大学第一附属中学高三年级组
命 题 人:方　钢　韩文晶
审 题 人:钟　涛　胡立松
审订单位:华中师范大学考试研究院

本试题卷共4页,共22题。满分150分,考试用时120分钟

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设$U=\mathbf{R}$,已知两个非空集合M,N满足$M\cap(\complement_U N)=\varnothing$,则

A. $M\cap N=\mathbf{R}$　　B. $M\subseteq N$　　C. $N\subseteq M$　　D. $M\cup N=\mathbf{R}$

2. 设实数$x>0$,则"$|\log_2 x|<1$"成立的一个必要不充分条件是

A. $\frac{1}{2}<x<2$　　B. $1<x<2$　　C. $x<1$　　D. $x<2$

3. 正六边形$ABCDEF$的边长为2,则$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FD}=$

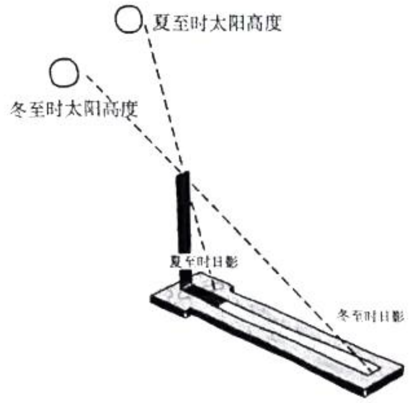
A. -6　　B. $-2\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 6

4. 一个质地均匀的正四面体,四个面分别标以数字1,2,3,4. 抛掷该正四面体两次,依次记下它与地面接触的面上的数字. 记事件A为"第一次记下的数字为奇数",事件B为"第二次记下的数字比第一次记下的数字大1",则下列说法正确的是

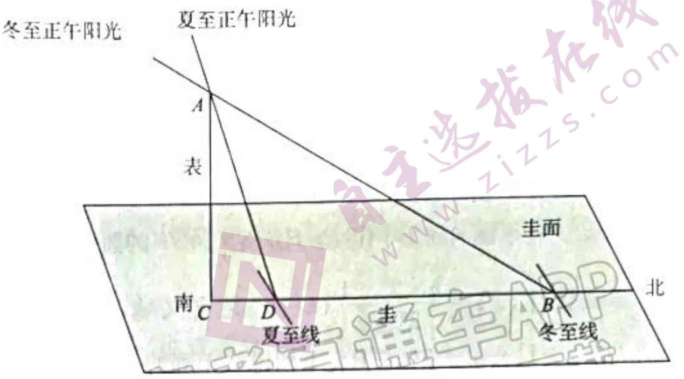
A. $P(A)=\frac{1}{3}$　　B. 事件A与事件B互斥

C. $P(B|A)=\frac{1}{4}$　　D. 事件A与事件B相互独立

5. 圭表(如图甲)是我国古代一种通过测量正午日影长度来推定节气的天文仪器,它包括一根直立的标竿(称为"表")和一把呈南北方向水平固定摆放的与标竿垂直的长尺(称为"圭"). 当太阳在正午时刻照射在表上时,日影便会投影在圭面上,圭面上日影长度最长的那一天定为冬至,日影长度最短的那一天定为夏至. 图乙是一个根据某地的地理位置设计的圭表的示意图,已知某地冬至正午时太阳高度角(即$\angle ABC$)大约为15°,夏至正午时太阳高度角(即$\angle ADC$)大约为60°,圭面上冬至线与夏至线之间的距离(即DB的长)为a,则表高(即AC的长)为



甲



乙

A. $(2-\sqrt{3})a$　　B. $\frac{3+\sqrt{3}}{4}a$　　C. $\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$　　D. $\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$

6. A、B、C、D、E、F 这 6 位同学站成一排照相，要求 A 与 C 相邻且 A 排在 C 的左边，B 与 D 不相邻且均不排在最右边，则这 6 位同学站队的不同排法数为

A. 72　　B. 48　　C. 36　　D. 24

7. 已知实数 $a,b,c\in(0,1)$，e 为自然对数的底数，且 $ae^2=2e^a$，$be^3=3e^b$，$2c=e^c\ln 2$，则

A. $b<a<c$　　B. $a<b<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，过 F_2 的直线 l 交双曲线 C 于 P，Q 两点且使得 $\overrightarrow{PF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2Q}(0<\lambda<1)$. A 为左支上一点且满足 $\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_2P}=\mathbf{0}$，$\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$，$\triangle AF_2P$ 的面积为 b^2，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，选对但不全对的得 2 分。

9. 下列说法正确的是

A. 随机变量 X 服从两点分布，若 $P(X=0)=\frac{1}{3}$，则 $E(X)=\frac{1}{3}$

B. 随机变量 $X\sim B(n,p)$，若 $E(X)=30$，$D(X)=10$，则 $p=\frac{2}{3}$

C. 随机变量 X 服从正态分布 $N(4,1)$，且 $P(X\geqslant 5)=0.158\,7$，则 $P(3<X<5)=0.841\,3$

D. 随机变量 X 服从正态分布 $N(3,4)$，且满足 $X+2Y=3$，则随机变量 Y 服从正态分布 $N(0,1)$

10. 设函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$，$\omega>0$，下列说法正确的是

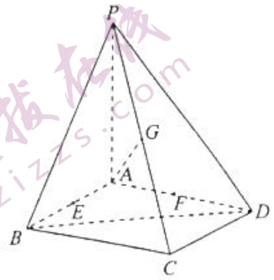
A. 当 $\omega=2$ 时，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称

B. 当 $\omega=\pi$ 时，$f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{4}{3},0\right)$ 成中心对称

C. 当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增

D. 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最小值为 -2，则 ω 的取值范围为 $\omega\geqslant\frac{7}{6}$

11. 如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PA=2$. 点 E,F,G 分别为棱 AB,AD,PC 的中点，下列说法正确的是



A. $AG\perp$ 平面 PBD

B. 直线 FG 和直线 AC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$

C. 过点 E,F,G 的平面截四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 所得的截面为五边形

D. 当点 T 在平面 $ABCD$ 内运动，且满足 $\triangle AGT$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 时，动点 T 的轨迹是圆

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}$ $(k\in\mathbf{R})$ 是定义域不为 $\mathbf{R}$ 的奇函数. 定义函数 $\varphi(x)=(f(x)+1)^2+a|f(x)+1|+a^2-7$ $(a\in\mathbf{R})$. 下列说法正确的是

A. $k=-1$

B. $f(x)$ 在定义域上单调递增

C. 函数 $\varphi(x)$ 不可能有四个零点

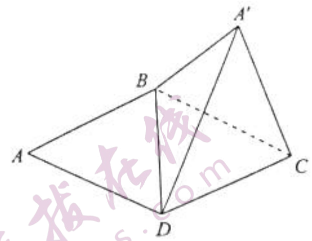
D. 若函数 $\varphi(x)$ 仅有三个零点 x_1,x_2,x_3，满足 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1+x_3=0$，则 a 的值唯一确定且 $a\in(-3,-2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 在 $(x+\mathrm{i})^8$（其中 i 为虚数单位）的展开式中，x^4 项的系数为________.（用数字作答）

14. 已知抛物线 $C: y^2=2px\ (p>2)$ 的焦点为 F，点 M 为 C 上一点，点 N 为 x 轴上一点，若 $\triangle FMN$ 是边长为 2 的正三角形，则 p 的值为________.

15. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形且 $\angle A=\frac{\pi}{3}$，现将 $\triangle ABD$ 以 BD 为轴翻折 $\frac{2\pi}{3}$ 至 $\triangle A'BD$，使得二面角 $A'\text{-}BD\text{-}C$ 为锐二面角，则点 B 到平面 $A'CD$ 的距离是________.



16. 已知数列 $\{a_n\}$ 为 $1,1,2,1,2,4,1,2,4,8,1,2,4,8,16,\cdots$，其中第一项是 2^0，接下来的两项是 $2^0,2^1$，再接下来的三项是 $2^0,2^1,2^2$，依此规律类推. 若其前 n 项和 $S_n=2^k\ (k\in\mathbf{N}^*)$，则称 k 为 $\{a_n\}$ 的一个理想数. 将 $\{a_n\}$ 的理想数从小到大依次排成一列，则第二个理想数是________；当 $\{a_n\}$ 的项数 $n\leqslant 2\,022$ 时，其所有理想数的和为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=\frac{3}{4}$，$a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n=\frac{a_n}{2n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$ 为等比数列；

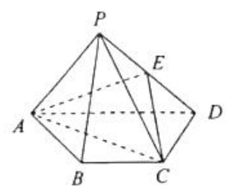
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，$\triangle PAC$ 为等边三角形，平面 $PAC\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点. 底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$BC/\!/AD$，$AD=2$，$AB=BC=CD=1$.

(1) 证明：$PA\perp CD$；

(2) 求二面角 $P\text{-}CE\text{-}A$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-B\right)=\frac{3}{4}$.

(1) 求角 B 的大小；

(2)若$\triangle ABC$为钝角三角形，________，求$\triangle ABC$外接圆的半径R的取值范围.

请在下列两个条件中选择一个作为条件补充在横线上，并解决问题.

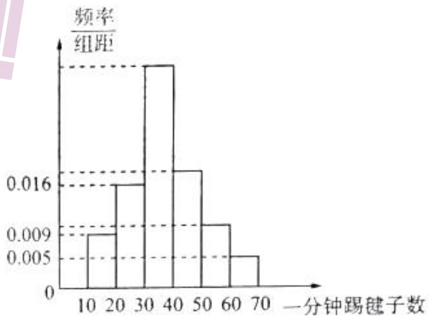
①$a+c=3$；②$a-c=3$.

（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答记分.）

20.（本小题满分12分）

为丰富学生在校的课余生活，某校高三年级倡导学生积极参加踢毽子、投篮、射门等体育活动.各班拟推选“运动健将”组建班级代表队参与年级组织的体育比赛，年级依据各班团体和个人项目成绩的总积分排名给予表彰.

(1)踢毽子是团体项目之一.班级人均一分钟踢毽子数不低于37个就认定为优秀.A班利用体育课进行一分钟踢毽子练习，体育委员统计出同学们的成绩（全介于10到70之间）并作出频率分布直方图如图所示（原始成绩单丢失）.已知该频率分布直方图后四组“柱高”依次成等比数列，假若以这次练习的成绩做评价，该班是否能达到优秀标准？请说明你的判断理由.



(2)年级组织的竞技比赛中设有定点投篮和射门两个个人项目，竞赛规则如下：

参赛选手从甲、乙两种方式中任选一种进行比赛，若投中或射中就称之为成功.

甲方式：从投篮、射门两项中通过抽签等可能地选择其中一个项目连续测试两次；

乙方式：从投篮、射门两项中通过抽签等可能地选择其中一个项目进行测试，若该项目成功则换另一个项目接着进行测试，否则重复测试该项目.此方式也只测试两次.

积分规则：无论选甲、乙哪种方式，若某项目首次测试成功就记5分，失败则记0分；再次测试该项目时，成功只记4分，失败仍记0分.

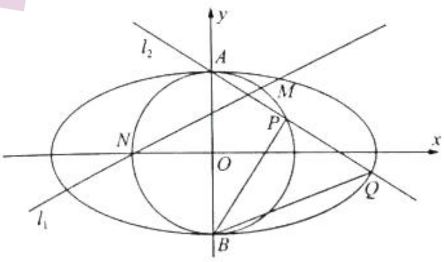
A班推选a同学代表班级从甲、乙两方式中选择一种参加个人项目比赛.已知a同学投篮和射门的命中率分别为$\frac{4}{5}$，$\frac{3}{5}$，且前后两项测试不会相互影响.以参加比赛的得分期望为标准，请问a同学该选择哪种方式？

21.（本小题满分12分）

如图，已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线$l_1:y=\frac{1}{2}(x+b)$与圆$O:x^2+y^2=b^2$交于$M,N$两点，$|MN|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(1)求椭圆E的方程；

(2)A,B为椭圆E的上、下顶点，过点A作直线$l_2:y=kx+b$ $(k<0)$交圆O于点P，交椭圆E于点Q（P,Q位于y轴的右侧），直线BP,BQ的斜率分别记为k_1,k_2，试用k表示$k_1+\frac{1}{4k_2}$，并求当$k_1+\frac{1}{4k_2}\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$时，$\triangle BPQ$面积的取值范围.



22.（本小题满分12分）

已知函数$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，$g(x)=x+\frac{6}{5}\sin x$.

(1)若$x>0$，直线l是$f(x)$的一条切线，求切线l的倾斜角θ的取值范围；

(2)求证：$f(x)>g(x)$对于$x\in(-2,+\infty)$恒成立.

（参考数据：$e^{\frac{\pi}{4}}\approx2.19$，$e^{\frac{\pi}{3}}\approx2.85$，$\sqrt{2}\approx1.41$，$\sqrt{3}\approx1.73$，$\pi\approx3.14$）

机密★启用前(新高考卷)

华大新高考联盟2022年名校高考押题卷

数学参考答案和评分标准

一、选择题

1.【答案】B

【解析】由 Venn 图易知 $M=N$,选 B.

2.【答案】D

【解析】不等式 $|\log_2 x|<1$ 的解集为 $A\left(\frac{1}{2},2\right)$,选 D.

3.【答案】A

【解析】在$\triangle CDE$中,$CD=DE=2$,$\angle CDE=120^\circ$,由余弦定理得$CE=2\sqrt{3}$,

所以有$|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{DF}|=2\sqrt{3}$,$\overrightarrow{CE}$与$\overrightarrow{FD}$所成的角为$120^\circ$,

所以$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{FD}=(2\sqrt{3})^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$,选 A.

4.【答案】C

【解析】由题意得$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$,$P(AB)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$,

$\because P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$,$\therefore$事件$A$和事件$B$不相互独立,$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$,选C.

5.【答案】D

【解析】$\tan15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

在$\triangle ABC$中,$BC=\dfrac{AC}{\tan\angle ABC}=(2+\sqrt{3})AC$,在$\triangle ADC$中,$CD=\dfrac{AC}{\tan\angle ADC}=\dfrac{AC}{\tan60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AC$.

由$DB=BC-CD=(2+\sqrt{3})AC-\dfrac{\sqrt{3}}{3}AC=\left(2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)AC=a$,得$AC=\dfrac{3a}{6+2\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}a$,选 D.

6.【答案】C

【解析】首先将A与C捆绑到一起,与除B、D以外的其他2位同学共3个元素进行排列,有$A_3^3=6$种排法,再将B、D插空到除最右边的3个位置中,有$A_3^2=6$种排法,因此共有$6\times6=36$种排法,选C.

7.【答案】A

【解析】由$ae^2=2e^a$,$be^3=3e^b$,$2c=e^c\ln2$得$\dfrac{e^a}{a}=\dfrac{e^2}{2}$,$\dfrac{e^b}{b}=\dfrac{e^3}{3}$,$\dfrac{e^c}{c}=\dfrac{2}{\ln2}=\dfrac{4}{\ln4}$,

构造函数$f(x)=\dfrac{e^x}{x}(x>0)$,求导得$f'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,令$f'(x)=0$,得$x=1$.

当$x\in(0,1)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当$x\in(1,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增.

因为$1<\ln4<2<3$,所以$f(\ln4)<f(2)<f(3)$,即$f(c)<f(a)<f(b)$.

又因为$a,b,c\in(0,1)$,$f(x)$在$(0,1)$上单调递减,所以$b<a<c$,选A.

8.【答案】C

【解析】因为$\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_2P}=\mathbf{0}$，所以四边形$PF_1AF_2$是平行四边形.

所以$S_{\triangle AF_1F_2}=S_{\triangle F_1F_2P}=\dfrac{b^2}{\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}}=b^2$，可得$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{2}$.

过点A作x轴的平行线交PQ于点B，可知四边形F_1F_2BA是平行四边形.

因为$\overrightarrow{F_1F_2}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$，

所以$\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2Q})=\overrightarrow{AF_2}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF_2}+\overrightarrow{F_2B}$，所以有$\overrightarrow{F_2B}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{F_2Q}$.

设$|PF_2|=m$，则$|PF_1|=m+2a$，$|AF_1|=|F_2B|=m$，$|F_2Q|=3m$，$|F_1Q|=3m+2a$，$|PQ|=4m$.

在$\text{Rt}\triangle PF_1Q$中，由$|PF_1|^2+|PQ|^2=|F_1Q|^2$，解得$m=a$.

在$\text{Rt}\triangle PF_1F_2$中，由$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$，得$10a^2=4c^2$，所以离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，故选C.

二、选择题

9.【答案】BD

【解析】随机变量X服从两点分布，若$P(X=0)=\dfrac{1}{3}$，则成功概率$p=P(X=1)=\dfrac{2}{3}$，$E(X)=\dfrac{2}{3}$，A选项错误；

随机变量$X\sim B(n,p)$，则$E(X)=np=30$，$D(X)=np(1-p)=10$，解得$p=\dfrac{2}{3}$，B选项正确；

随机变量$X\sim N(4,1)$，则$P(X\geqslant5)=0.1587$，$P(X\leqslant3)=P(X\geqslant5)$，

$P(3<X<5)=1-P(X\leqslant3)-P(X\geqslant5)=1-2P(X\geqslant5)=1-2\times0.1587=0.6826$，C选项错误；

随机变量X，Y满足$X+2Y=3$，则$Y=\dfrac{3-X}{2}$，易知$E(Y)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}E(X)=0$，$D(Y)=\dfrac{1}{4}D(X)=1$，则$Y\sim N(0,1)$，D选项正确.

10.【答案】ABD

【解析】当$\omega=2$时，$f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$2\times\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{12}$对称，A选项正确；

当$\omega=\pi$时，$f(x)=2\sin\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\pi\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{\pi}{3}=0$，所以$f(x)$的图象关于点$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$成中心对称，B选项正确；

当$\omega=\dfrac{1}{2}$时，$f(x)=2\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{12}\right]$，$y=\sin x$在$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{7\pi}{12}\right]$上不单调递增，C选项错误；

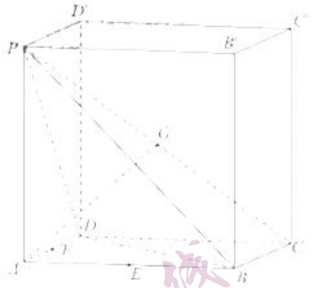
若$f(x)$在$[0,\pi]$上的最小值为-2，由$x\in[0,\pi]$，得$\omega x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\left(\omega+\dfrac{1}{3}\right)\pi\right]$，$\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$可取得$-1$，

所以$\left(\omega+\dfrac{1}{3}\right)\pi\geqslant\dfrac{3}{2}\pi$，解得$\omega\geqslant\dfrac{7}{6}$，D选项正确.

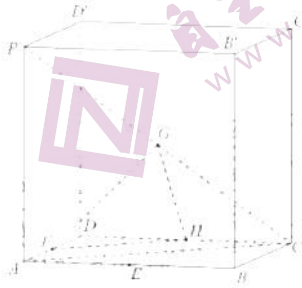
11.【答案】ABC

【解析】可将四棱锥P-$ABCD$补形成正方体$ABCD$-$PB'C'D'$，如图1，直线AG即体对角线AC'，易证$AC'\perp$面PDB，A选项正确；

如图②，取 CD 的中点 H，连接 FH，可知 $FH\parallel AC$，所以 $\angle GFH$（或其补角）与直线 FG 和直线 AC 所成的角相同，在 $\triangle FGH$ 中，$FG=GH=FH$，所以 $\angle GFH=\frac{\pi}{3}$，B 选项正确；



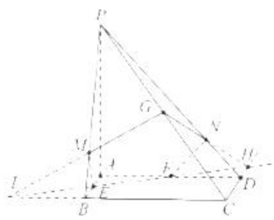
图①



图②

如图③，延长 EF 交直线 CD 于点 H，交直线 BC 于点 I，连接 GI 交 PB 于点 M，连接 GH 交 PD 于点 N，则五边形 $EFNGM$ 即为平面 EFG 截四棱锥 P-$ABCD$ 所得的截面，C 选项正确；

当 $S_{\triangle ATG}=\frac{1}{2}$ 时，$AG=\sqrt{3}$，所以点 T 到 AG 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 T 在以 AG 为轴，底面半径 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆柱上，又点 T 在平面 $ABCD$ 上，所以点 T 的轨迹是椭圆．D 选项错误．



图③

12.【答案】ACD

【解析】因为函数 $f(x)=\frac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}(k\in\mathbf{R})$ 为奇函数，

所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $\frac{k-2^x}{1+k\cdot 2^x}+\frac{k\cdot 2^x-1}{2^x+k}=0$，

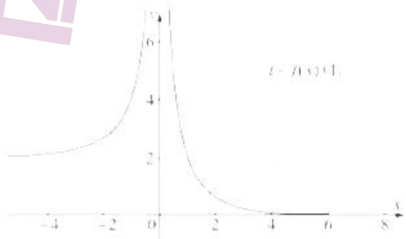
化简整理得 $(k^2-1)(4^x-1)=0$，所以 $k^2-1=0$，解得 $k=\pm1$．

当 $k=1$ 时，$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$，定义域为 $\mathbf{R}$，不符合题意；

当 $k=-1$ 时，$f(x)=\frac{-2^x-1}{2^x-1}=-1-\frac{2}{2^x-1}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，A 选项正确；

因为 $f(-1)=3$，$f(1)=-3$，$f(-1)>f(1)$，所以 $f(x)$ 在定义域上不是单调递增的，B 选项错误；

$f(x)=-1-\frac{2}{2^x-1}$，令 $t=|f(x)+1|$，函数图象如图所示．



若函数 $g(x)$ 有四个零点，则 $t^2-at+a^2-7=0$ 有两个大于 2 的实根，$\begin{cases}\Delta=a^2-4(a^2-7)>0,\\ \frac{a}{2}>2,\\ 2^2-2a+a^2-7>0,\end{cases}$ 符合题意的 a 不存在，C 选项正确；

若函数 $g(x)$ 仅有的三个零点分别为 x_1,x_2,x_3，满足 $x_1<x_2<x_3$ 且 $x_1+x_2=0$，

则 $t^2-at+a^2-7=0$ 有一个实根 t_1 大于 2，另一根 $t_2\in(0,2]$，由韦达定理得 $t_1+t_2=a$，$t_1t_2=a^2-7>0$，

其中 $|f(x)+1|=t_1$ 的两根为 x_1,x_2，$|f(x)-1|=t_2$ 的实根为 x_3．

$t_1=|f(x_1)+1|=-f(x_1)+1=-\frac{2}{2^{x_1}-1}$，$t_2=|f(x_2)+1|=-f(x_2)-1=\frac{2}{2^{x_2}-1}=\frac{2^{x_1}}{1-2^{x_1}}$.

因为 $t_1-t_2=2$，$(-a)^2-4(a^2-7)=4$，解得 $a=\pm2\sqrt{2}$（正值舍去），所以 $a=-2\sqrt{2}\in(-3,-2)$，D 选项正确.

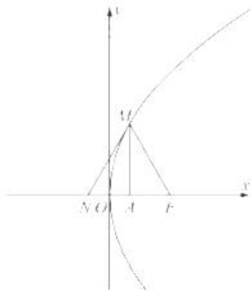
三、填空题

13.【答案】70.

【解析】$(x-i)^8$（其中 i 为虚数单位）的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}(-i)^r$，令 $8-r=4$，得 $r=4$.

所以 x^4 项的系数为 $C_8^4(-i)^4=70$.

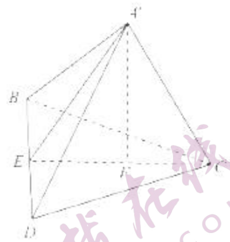
14.【答案】3.



【解析】如图，因为△FMN 是边长为 2 的正三角形，所以可设 $y_M=\sqrt{3}$，当 M 与焦点 F 的横坐标相同时，$|MF|=p=2$，所以点 M 位于点 F 的左侧，$x_M=\frac{p}{2}-1=2-\frac{p}{2}$，解得 $p=3$.

15.【答案】$\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

【解析】如图，取 BD 的中点 E，连接 $A'E$，CE，则∠$A'EC$ 为二面角 A'-BD-C 的平面角，∠$A'EC=\frac{\pi}{3}$，$A'E=CE=\sqrt{3}$，所以△$A'CE$ 为正三角形.



过点 A' 作 $A'F\perp CE$ 于点 F，易知 $A'F\perp$ 面 BCD，$A'F=A'E\cdot\sin\angle A'EC=\frac{3}{2}$，

设点 B 到△$A'CD$ 所在平面的距离为 d，

由 $V_{A'-BCD}=V_{B-A'CD}$，可知 $A'F\cdot S_{\triangle BCD}=d\cdot S_{\triangle A'CD}$，解得 $d=\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

16.【答案】2；115.（第一空 2 分，第二空 3 分）

【解析】易知第一个理想数为 1，第二个理想数为 2，当 $N\geq3$ 时，数列可分为：

第 1 组 1 个数：1，其和为 2^1-1.

第 2 组 2 个数：2^0，2^1，其和为 2^2-1.

第 3 组 3 个数：2^0，2^1，2^2，其和为 2^3-1.

……

第 N 组 N 个数：2^0，2^1，2^2，…，2^{N-1}，其和为 2^N-1.

于是，前 N 组共 $\frac{N(N+1)}{2}$ 个数，其和为 $2^{N+1}-2-N$，当 $N\geq3$ 时，$2^{N+1}-2-N$ 不可能是 2 的整数幂.

设第 N+1 组还有 t 个数（$0\leq t\leq N-1$），这 t 个数的和为 2^t-1.

所以项数 $n=\frac{N(N+1)}{2}+t$，其前 n 项和 $S_n=2^{N+1}+2^t-N-3$.

当 $N\geq3$ 时，若 $2^t=N+3$，则 $N+1$ 是 $\{a_n\}$ 的一个理想数.

由项数 $n\leq2022$，即 $\frac{N(N+1)}{2}\leq2022<\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ 得 $N\leq63$，由 $2^t=N+3\leq66$，因此 $t\leq6$.

当 $t=3$ 时，$N=5$，理想数为 6；当 $t=4$ 时，$N=13$，理想数为 14；

当 $t=5$ 时，$N=29$，理想数为 30；当 $t=6$ 时，$N=61$，理想数为 62；

所以当项数 $n\leq2022$ 时，$\{a_n\}$ 所有理想数的和为 $1+2+6+14+30+62=115$.

四、解答题

17.【解析】由题意得 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n-1}\right)a_n=\frac{2n+1}{2(2n-1)}a_n$，故 $\frac{a_{n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{2n-1}$. ……………………（3 分）

而$\frac{a_1}{3}-\frac{1}{4}\neq0$.

从而数列$\left\{\frac{a_n}{2n-1}\right\}$是以$\frac{a_1}{1}=2\times\frac{a_1}{3}=\frac{1}{2}$为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列. ························ (5分)

(2)由(1)知$\frac{a_n}{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故$a_n=(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ························ (7分)

故$S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，①

$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，②

①−②得$\frac{1}{2}S_n=1\times\left(\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}+2\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$

$-(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

所以$S_n=3-(2n+3)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. ························ (10分)

18.【解析】(1)取AD的中点F，连接CF.

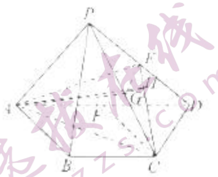
因为$BC\parallel AF$且$BC=AF$，所以四边形$ABCF$是平行四边形，所以$CF=AB=1$.

因为$CF=\frac{1}{2}AD$，所以$AC\perp CD$. ························ (3分)

因为平面$PAC\perp$平面$ABCD$，平面$PAC\cap$平面$ABCD=AC$，所以$CD\perp$平面PAC.

又$PA\subset$平面PAC，所以$PA\perp CD$. ························ (5分)

(2)方法1：如图，取PC的中点G，连接AG，EG.



因为$\triangle PAC$为等边三角形，所以$AG\perp PC$.

由(1)知$CD\perp$平面PAC，$\because CD\subset$平面PCE，$\therefore$平面$PAC\perp$平面PCE.

又平面$PAC\cap$平面$PCE=PC$，$\therefore AG\perp$平面PCE，$\therefore AG\perp CE$.

过点G作$GH\perp EC$，垂足为H，连接AH.

$\because AG\cap GH=G$，$\therefore EC\perp$平面AHG.

$\angle AHG$即为二面角$P-CE-A$的平面角. ························ (8分)

在$Rt\triangle ACD$中，易得$AC=\sqrt{3}$，$\therefore AG=\frac{\sqrt{3}}{2}AC=\frac{3}{2}$.

在$Rt\triangle PCD$中，$PD=2$，$CE=\frac{1}{2}PD=1$.

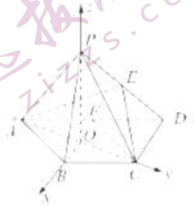
$\because EG$为$\triangle PCD$的中位线，$\therefore EG\parallel CD$，$\therefore EG\perp PC$，则$GH=\frac{EG\times CG}{CE}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\tan\angle AHG=\frac{AG}{GH}=2\sqrt{3}$，所以$\cos\angle AHG=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ························ (11分)

所以二面角$P-CE-A$的余弦值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$. ························ (12分)

方法2：取AC的中点O，$\because PO\perp AC$，$\therefore PO\perp$平面$ABCD$，$\because AB=BC$，$\therefore OB\perp OC$.

以点O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$方向为x轴正方向，$\overrightarrow{OC}$方向为y轴正方向，$\overrightarrow{OP}$方向为z轴正方向建立如图所示的空间直角坐标系. ························ (6分)



$P\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$，$A\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$E\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$

$\overrightarrow{PC}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{CE}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(0,\sqrt{3},0)$. ………………（8分）

设平面 PCE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 取 $z_1=1$，得 $\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$.

设平面 ACE 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 取 $z_2=2$，得 $\overrightarrow{n_2}=(3,0,2)$. ……………………………………（10分）

$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………（11分）

易知二面角 A-DF-C 为锐角，所以二面角 A-DF-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$. ……………………（12分）

19.【解析】(1) $\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-B\right)=\sin^2\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$，……………………（2分）

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，此时 $B+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $B=\frac{\pi}{3}$. ……………………（6分）

(2)若选择条件①，

由正弦定理，$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a+c}{\sin A+\sin C}=\frac{3}{\sin A+\sin C}$，

而 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……………（8分）

因为 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，不妨设 $A\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $A+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

故 $\sin A+\sin C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，

$\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $R=\frac{3}{2(\sin A+\sin C)}\in(1,\sqrt{3})$. ……………………（12分）

若选择条件②，

因为 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，由 $a+c=3$ 及 $B=\frac{\pi}{3}$ 知角 A 必为钝角，即 $b^2+c^2-a^2<0(*)$. ……（7分）

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，代入$(*)$式得 $2c^2-ac<0$，故 $a>2c$.

所以 $3=a+c>c$，得 $c\in(0,3)$. ……………………………………（10分）

故 $b^2=a^2+c^2-ac=(a-c)^2+ac=9-(c+3)c-c^2-3c-9\in(9,27)$，可得 $b\in(3,3\sqrt{3})$

由正弦定理得 $R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{1}{\sqrt{3}}b\in(\sqrt{3},3)$. ……………………………………（12分）

20.【解析】(1)设倒数第1，2，3，4柱高的公比为 $q(q>1)$，

则 $\frac{0.05(1-q^4)}{1-q}=0.75$，即 $(1+q^2)(1+q)=15$，

记函数 $f(q)=1+q+q^2+q^3$，$q>1$.

数学参考答案和评分标准 第6页（共8页）

该函数在定义域上单调递增且 $f(2)=15$，故 $q=2$. ………………………………………… (3分)

利用频率分布直方图的信息可估计该班的一分钟踢毽子的平均值为

$\mu=15\times0.09+25\times0.16+35\times0.4+45\times0.2+55\times0.1+65\times0.05=37.1$. ………………… (4分)

因为 $37.1>37$，所以A班能达到优秀标准. ………………………………………… (5分)

(2) a 同学若是选择甲方式，记得分为 X，X 可能的取值为 $9,5,4,0$.

$P(X=9)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$.

得分的期望值为 $E(X)=9\times\frac{1}{2}+5\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.3$. ………………………… (8分)

a 同学若是选择乙方式，记得分为 Y，Y 可能的取值为 $10,5,4,0$.

$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$，$P(X=5)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{11}{50}$，

$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$，$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$.

得分的期望值为 $E(Y)=10\times\frac{12}{25}+5\times\frac{11}{50}+4\times\frac{1}{5}+0\times\frac{1}{10}=6.7$. ………………………… (11分)

因为 $E(Y)>E(X)$，所以 a 同学该选择乙方式. ………………………………………… (12分)

21.【解析】(1)圆心 O 到直线 l_1 的距离为 $d=\sqrt{b^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}b\right|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$，解得 $b^2=1$.

联立 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ 故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………… (4分)

(2)由(1)可知，点 $A(0,1)$，$B(0,-1)$，直线 l_2 的方程为 $y=kx-1(k<0)$，设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+k^2)x^2-2kx=0$，所以 $x_1=\frac{2k}{k^2+1}$，$y_1=kx_1-1=\frac{k^2-1}{k^2+1}$.

联立 $\begin{cases}y=kx-1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2-8kx=0$，所以 $x_2=\frac{8k}{4k^2+1}$，$y_2=kx_2-1=\frac{4k^2-1}{4k^2+1}$.

$k_1=\frac{y_1-1}{x_1}=\frac{\frac{-2}{k^2+1}}{\frac{2k}{k^2+1}}=-\frac{1}{k}$，$\frac{x_2}{4(y_2+1)}=\frac{\frac{8k}{4k^2+1}}{\frac{8}{4k^2+1}}=k$. ………………………… (8分)

由 $-\frac{1}{k}-k\in\left[2,\frac{5}{2}\right)$，得 $k\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$. ………………………… (9分)

$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ABQ}-S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|(x_1-x_2)=x_1-x_2=\frac{-8k}{4k^2+1}-\frac{-2k}{k^2+1}=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$. …(10分)

令函数 $f(k)=\frac{-6k}{(4k^2+1)(k^2+1)}$，

$f'(k)=\frac{6(12k^4+5k^2-1)}{[(4k^2+1)(k^2+1)]^2}>0$，所以函数 $f(k)$ 在 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，$f(-2)=\frac{12}{85}$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{5}$，

所以$\triangle BPQ$面积的取值范围为$\left(\frac{12}{85},\frac{6}{5}\right)$. …………………………………………………………………… (12分)

22.【解析】(1) $f'(x)=e^x-x$，设$p(x)=f'(x)$，则$p'(x)=e^x-1>0$.

所以$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故$f'(x)>f'(0)=1$，即$\tan\theta>1$，因此$\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$. …… (4分)

(2)令$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{6}{5}\sin x$，$x\in(-2,+\infty)$.

则$h'(x)=e^x-x-1-\frac{6}{5}\cos x$，设函数$\varphi(x)=h'(x)$，得$\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x$.

当$x\in(-2,0)$时，$e^x-1<0$，$\sin x<0$，$\varphi'(x)<0$；

当$x\in(0,\pi)$时，$e^x-1>0$，$\sin x>0$，$\varphi'(x)>0$；

当$x\in[\pi,+\infty)$时，$\varphi'(x)=e^x-1+\frac{6}{5}\sin x>e^\pi-1-\frac{6}{5}>0$.

所以$\varphi(x)$在$(-2,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，$\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=-\frac{6}{5}<0$. ………… (6分)

$\varphi(-2)=e^{-2}+1-\frac{6}{5}\cos 2>0$，所以$\exists x_1\in(-2,0)$，使得$\varphi(x_1)=0$.

又$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\pi}{4}-1-\frac{6}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 2.19-\frac{3.14}{4}-1-0.6\times1.41=-0.111<0$.

$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)=e^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}-1-\frac{6}{5}\times\frac{1}{2}\approx 2.85-\frac{3.14}{3}-1-0.6\approx 0.203>0$.

所以$\exists x_2\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，使得$\varphi(x_2)=0$. …………………………………………………… (8分)

函数$h(x)$的单调性及极值情况如下表：

x	$(-2,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

因为$h(-2)=e^{-2}-\frac{6}{5}\sin(-2)=e^{-2}+\frac{6}{5}\sin 2>0$，所以只需证明$h(x_2)>0$. ………………………… (9分)

由$h'(x_2)=0$，得$e^{x_2}=x_2+1+\frac{6}{5}\cos x_2$.

所以$h(x_2)=e^{x_2}-\frac{1}{2}x_2^2-x_2-\frac{6}{5}\sin x_2=1+\frac{6}{5}\cos x_2-\frac{6}{5}\sin x_2-\frac{1}{2}x_2^2$.

令$m(t)=1+\frac{6\sqrt{2}}{5}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}t^2$，$t\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$.

因为$m(t)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$上单调递减.

所以$h(x_2)=m(x_2)>m\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi^2}{18}\approx 1.6-0.6\times1.73-\frac{3.14^2}{18}\approx 0.011>0$.

所以$h(x)>0$对于$x\in(-2,+\infty)$恒成立，即$f(x)>g(x)$对于$x\in(-2,+\infty)$恒成立. …… (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。