

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数 学 (文) (北京卷)

本试卷共5页,150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共40分)

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 2\}$, $B = \{x | x > 1\}$, 则 $A \cup B =$

- (A) $(-1, 1)$ (B) $(1, 2)$
(C) $(-1, +\infty)$ (D) $(1, +\infty)$

(2) 已知复数 $z = 2 + i$, 则 $z \cdot \bar{z} =$

- (A) $\sqrt{3}$ (B) $\sqrt{5}$
(C) 3 (D) 5

(3) 下列函数中,在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

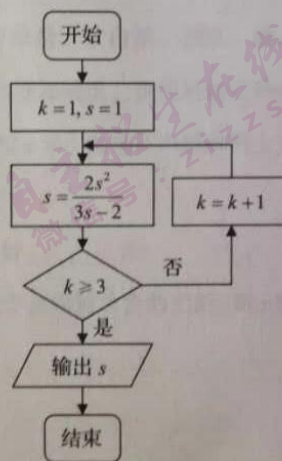
- (A) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $y = 2^{-x}$
(C) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (D) $y = \frac{1}{x}$

(4) 执行如图所示的程序框图,输出的 s 值为

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

(5) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$, 则 $a =$

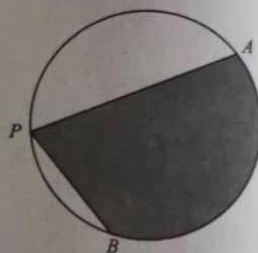
- (A) $\sqrt{6}$ (B) 4
(C) 2 (D) $\frac{1}{2}$



- (6) 设函数 $f(x) = \cos x + b \sin x$ (b 为常数), 则 “ $b=0$ ” 是 “ $f(x)$ 为偶函数” 的
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件
- (7) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足 $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$, 其中星等为 m_k 的星的亮度为 E_k ($k=1, 2$). 已知太阳的星等是 -26.7 , 天狼星的星等是 -1.45 , 则太阳与天狼星的亮度的比值为
- (A) $10^{10.1}$ (B) 10.1
(C) $\lg 10.1$ (D) $10^{-10.1}$
- (8) 如图, A, B 是半径为 2 的圆周上的定点, P 为圆周上的动点, $\angle APB$ 是锐角, 大小为 β .

图中阴影区域的面积的最大值为

- (A) $4\beta + 4\cos\beta$ (B) $4\beta + 4\sin\beta$
(C) $2\beta + 2\cos\beta$ (D) $2\beta + 2\sin\beta$



第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 已知向量 $a = (-4, 3)$, $b = (6, m)$, 且 $a \perp b$, 则 $m =$ _____.

(10) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 2, \\ y \geq -1, \\ 4x - 3y + 1 \geq 0, \end{cases}$ 则 $y - x$ 的最小值为 _____, 最大值为 _____.

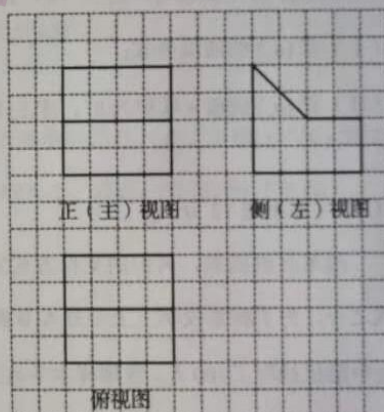
(11) 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l . 则以 F 为圆心, 且与 l 相切的圆的方程为 _____.

(12) 某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得, 其三视图如图所示. 如果网格纸上小正方形的边长为 1, 那么该几何体的体积为 _____.

(13) 已知 l, m 是平面 α 外的两条不同直线. 给出下列三个论断:

- ① $l \perp m$; ② $m \parallel \alpha$; ③ $l \perp \alpha$.

以其中的两个论断作为条件, 余下的一个论断作为结论, 写出一个正确的命题: _____.



(14) 李明自主创业, 在网上经营一家水果店, 销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃, 价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒. 为增加销量, 李明对这四种水果进行促销: 一次购买水果的总价达到 120 元, 顾客就少付 x 元. 每笔订单顾客网上支付成功后, 李明会得到支付款的 80%.

- ① 当 $x = 10$ 时, 顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒, 需要支付 _____ 元;
 ② 在促销活动中, 为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折, 则 x 的最大值为 _____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $a=3$ ， $b-c=2$ ， $\cos B=-\frac{1}{2}$ 。

(I) 求 b, c 的值；

(II) 求 $\sin(B+C)$ 的值。

(16) (本小题 13 分)

设 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1=-10$ ，且 a_2+10, a_3+8, a_4+6 成等比数列。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，求 S_n 的最小值。

(17) (本小题 12 分)

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变。近年来，移动支付已成为主要支付方式之一。为了解某校学生上个月 A, B 两种移动支付的使用情况，从全校所有的 1000 名学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A, B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付方式 \ 支付金额	支付金额	
	不大于 2000 元	大于 2000 元
仅使用 A	27 人	3 人
仅使用 B	24 人	1 人

(I) 估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数；

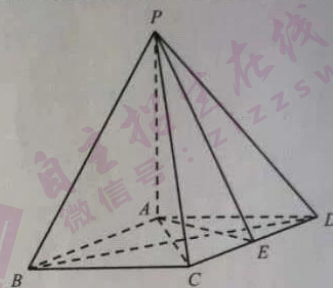
(II) 从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人，求该学生上个月支付金额大于 2000 元的概率；

(III) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化。现从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人，发现他本月的支付金额大于 2000 元。结合 (II) 的结果，能否认为样本仅使用 B 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由。

(18) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为菱形, E 为 CD 的中点.

- (I) 求证: $BD \perp$ 平面 PAC ;
- (II) 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PAE ;
- (III) 棱 PB 上是否存在点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ?
说明理由.



(19) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右焦点为 $(1, 0)$, 且经过点 $A(0, 1)$.

- (I) 求椭圆 C 的方程;
- (II) 设 O 为原点, 直线 $l: y = kx + t (t \neq \pm 1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P, Q , 直线 AP 与 x 轴交于点 M , 直线 AQ 与 x 轴交于点 N . 若 $|OM| \cdot |ON| = 2$, 求证: 直线 l 经过定点.

(20) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$.

- (I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程;
- (II) 当 $x \in [-2, 4]$ 时, 求证: $x - 6 \leq f(x) \leq x$;
- (III) 设 $F(x) = |f(x) - (x + a)| (a \in \mathbf{R})$, 记 $F(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为 $M(a)$. 当 $M(a)$ 最小时, 求 a 的值.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学(文)(北京卷)参考答案

一、选择题(共8小题,每小题5分,共40分)

- (1) C (2) D (3) A (4) B
(5) D (6) C (7) A (8) B

二、填空题(共6小题,每小题5分,共30分)

- (9) 8 (10) -3 1
(11) $(x-1)^2 + y^2 = 4$ (12) 40
(13) 若 $l \perp m$, $l \perp \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$. (答案不唯一)
(14) 130 15

三、解答题(共6小题,共80分)

(15) (共13分)

解: (I) 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 得

$$b^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

因为 $b = c + 2$,

$$\text{所以 } (c+2)^2 = 3^2 + c^2 - 2 \times 3 \times c \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

解得 $c = 5$.

所以 $b = 7$.

(II) 由 $\cos B = -\frac{1}{2}$ 得 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得 $\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $B + C = \pi - A$.

$$\text{所以 } \sin(B+C) = \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

(16) (共 13 分)

解: (I) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_1 = -10$,

所以 $a_2 = -10 + d$, $a_3 = -10 + 2d$, $a_4 = -10 + 3d$.

因为 $a_2 + 10$, $a_3 + 8$, $a_4 + 6$ 成等比数列,

所以 $(a_3 + 8)^2 = (a_2 + 10)(a_4 + 6)$.

所以 $(-2 + 2d)^2 = d(-4 + 3d)$.

解得 $d = 2$.

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 12$.

(II) 由 (I) 知, $a_n = 2n - 12$.

所以, 当 $n \geq 7$ 时, $a_n > 0$; 当 $n \leq 6$ 时, $a_n \leq 0$.

所以, S_n 的最小值为 $S_6 = -30$.

(17) (共 12 分)

解: (I) 由题知, 样本中仅使用 A 的学生有 $27 + 3 = 30$ 人, 仅使用 B 的学生有 $24 + 1 = 25$ 人, A, B 两种支付方式都不使用的学生有 5 人.

故样本中 A, B 两种支付方式都使用的学生有 $100 - 30 - 25 - 5 = 40$ 人.

估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数为 $\frac{40}{100} \times 1000 = 400$.

(II) 记事件 C 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽取 1 人, 该学生上个月的支付金额大于 2000 元”, 则 $P(C) = \frac{1}{25} = 0.04$.

(III) 记事件 E 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽查 1 人, 该学生本月的支付金额大于 2000 元”.

假设样本仅使用 B 的学生中, 本月支付金额大于 2000 元的人数没有变化, 则由

(II) 知, $P(E) = 0.04$.

答案示例 1: 可以认为有变化. 理由如下:

$P(E)$ 比较小, 概率比较小的事件一般不容易发生, 一旦发生, 就有理由认为本月支付金额大于 2000 元的人数发生了变化. 所以可以认为有变化.

答案示例 2: 无法确定有没有变化. 理由如下:

事件 E 是随机事件, $P(E)$ 比较小, 一般不容易发生, 但还是有可能发生的. 所以无法确定有没有变化.

(18) (共 14 分)

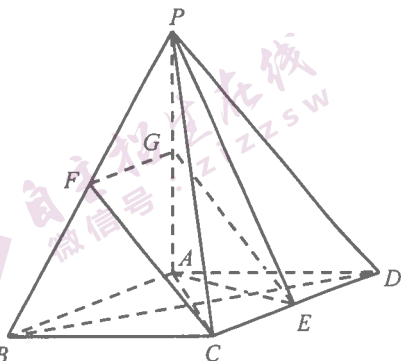
解: (I) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp BD$.

又因为底面 $ABCD$ 为菱形,

所以 $BD \perp AC$.

所以 $BD \perp$ 平面 PAC .



(II) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AE \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA \perp AE$.

因为底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, 且 E 为 CD 的中点,

所以 $AE \perp CD$.

所以 $AB \perp AE$.

所以 $AE \perp$ 平面 PAB .

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAE .

(III) 棱 PB 上存在点 F , 使得 $CF \parallel$ 平面 PAE .

取 F 为 PB 的中点, 取 G 为 PA 的中点, 连结 CF , FG , EG .

则 $FG \parallel AB$, 且 $FG = \frac{1}{2} AB$.

因为底面 $ABCD$ 为菱形, 且 E 为 CD 的中点,

所以 $CE \parallel AB$, 且 $CE = \frac{1}{2} AB$.

所以 $FG \parallel CE$, 且 $FG = CE$.

所以四边形 $CEGF$ 为平行四边形.

所以 $CF \parallel EG$.

因为 $CF \not\subset$ 平面 PAE , $EG \subset$ 平面 PAE ,

所以 $CF \parallel$ 平面 PAE .

(19) (共 14 分)

解: (I) 由题意得, $b^2 = 1, c = 1$.

所以 $a^2 = b^2 + c^2 = 2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(II) 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

则直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_1 - 1}{x_1}x + 1$.

令 $y = 0$, 得点 M 的横坐标 $x_M = -\frac{x_1}{y_1 - 1}$.

又 $y_1 = kx_1 + t$, 从而 $|OM| = |x_M| = \left| \frac{x_1}{kx_1 + t - 1} \right|$.

同理, $|ON| = \left| \frac{x_2}{kx_2 + t - 1} \right|$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + t, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases} \text{得} (1 + 2k^2)x^2 + 4ktx + 2t^2 - 2 = 0.$$

$$\text{则} x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1 + 2k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以} |OM| \cdot |ON| &= \left| \frac{x_1}{kx_1 + t - 1} \right| \cdot \left| \frac{x_2}{kx_2 + t - 1} \right| \\ &= \left| \frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2 + k(t-1)(x_1+x_2) + (t-1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2}}{k^2 \cdot \frac{2t^2 - 2}{1 + 2k^2} + k(t-1) \cdot \left(-\frac{4kt}{1 + 2k^2}\right) + (t-1)^2} \right| \\ &= 2 \left| \frac{1+t}{1-t} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{又} |OM| \cdot |ON| = 2,$$

$$\text{所以} 2 \left| \frac{1+t}{1-t} \right| = 2.$$

解得 $t = 0$, 所以直线 l 经过定点 $(0, 0)$.

(20) (共 14 分)

解: (I) 由 $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ 得 $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$.

令 $f'(x) = 1$, 即 $\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 1$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{8}{3}$.

又 $f(0) = 0$, $f(\frac{8}{3}) = \frac{8}{27}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 的斜率为 1 的切线方程是 $y = x$ 与 $y - \frac{8}{27} = x - \frac{8}{3}$,

即 $y = x$ 与 $y = x - \frac{64}{27}$.

(II) 令 $g(x) = f(x) - x$, $x \in [-2, 4]$.

由 $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2$ 得 $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x$.

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{8}{3}$.

$g'(x), g(x)$ 的情况如下:

x	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, \frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3}, 4)$	4
$g'(x)$		+		-		+	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6, 最大值为 0.

故 $-6 \leq g(x) \leq 0$, 即 $x - 6 \leq f(x) \leq x$.

(III) 由 (II) 知,

当 $a < -3$ 时, $M(a) \geq F(0) = |g(0) - a| = -a > 3$;

当 $a > -3$ 时, $M(a) \geq F(-2) = |g(-2) - a| = 6 + a > 3$;

当 $a = -3$ 时, $M(a) = 3$.

综上, 当 $M(a)$ 最小时, $a = -3$.