

姓名_____ 座位号_____

(在此卷上答题无效)

绝秘 ★ 启用前

2023 届安徽省“江南十校”联考

数 学

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、班级、考场号和座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

【公众号: 快思维小初高学习资料库】

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, $B = \{x | 2^{x-2} > 1\}$, 则 $A \cap (\complement_R B) = (\quad)$
 A. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ B. $\{x | 2 \leq x < 3\}$ C. $\{x | -1 < x \leq 2\}$ D. $\{x | 1 < x < 3\}$
2. 设 i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$, 则 z 在复平面内对应的点位于 (\quad)
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
3. 已知平面向量 a, b 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$, 且 $|a| = \sqrt{2}$, $|b| = 3$, 则 $|a+2b| = (\quad)$
 A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{26}$ D. $5\sqrt{2}$
4. 安徽徽州古城与四川阆中古城、山西平遥古城、云南丽江古城被称为中国四大古城. 徽州古城中有一古建筑, 其底层部分可近似看作一个正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$. 已知该正方体中, 点 E, F 分别是棱 AA_1, CC_1 的中点, 过 D_1, E, F 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线为 l , 则直线 l 与直线 AD_1 所成角为 (\quad)
 A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$



5. 为庆祝中国共产党第二十次全国代表大会胜利闭幕, 某高中举行“献礼二十大”活动, 高三年级派出甲、乙、丙、丁、戊 5 名学生代表参加, 活动结束后 5 名代表排成一排合影留念, 要求甲、乙两人不相邻且丙、丁两人必须相邻, 则不同的排法共有 (\quad) 种.
 A. 40 B. 24 C. 20 D. 12

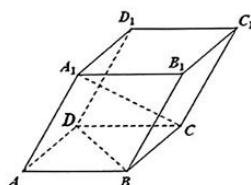
6. 已知函数 $f(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})\cos(x + \frac{\pi}{4})$, 则下列说法正确的是 (\quad)
 A. 点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 B. 点 $(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{2}}{4})$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心
 C. 直线 $x = \frac{5\pi}{8}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴 D. 直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴

数学试卷 第 1 页 (共 4 页)

7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 底面 ABC , $CA=CB=AP=2$, $\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$, 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 ()
- A. 25π B. 20π C. 16π D. 12π
8. 已知 $a=e^{0.9}+1, b=\frac{29}{10}, c=\ln(0.9e^3)$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=x^3-x(x \in \mathbf{R})$, 则 ()
- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
- C. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ D. $f(x)$ 的极值点为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9})$



10. 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=AD=AA_1=1$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$, 则 ()
- A. 直线 A_1C 与 BD 所成的角为 90° B. 线段 A_1C 的长度为 $\sqrt{3}$ (第 10 题图)
- C. 直线 A_1C 与 BB_1 所成的角为 90° D. 直线 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
11. 已知 O 为坐标原点, 点 $A(2a, 0)$, $B(2a, 2a^2)(a \neq 0)$, 线段 AB 的中点 M 在抛物线 $C: x^2=2py$ ($p > 0$) 上, 连接 OB 并延长, 与 C 交于点 N , 则 ()
- A. C 的准线方程为 $y=-\frac{1}{2}$ B. 点 B 为线段 ON 的中点
- C. 直线 AN 与 C 相切 D. C 在点 M 处的切线与直线 ON 平行
12. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 若 $f(x+3)=g(-x)+4$, $f'(x)+g'(1+x)=0$, 且 $g(2x+1)$ 为偶函数, 则 ()
- A. $g'(1)=0$ B. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
- C. 函数 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称 D. $\sum_{k=1}^{2023} f'(k)g'(k)=1$

【公众号: 快思维小初高学习资料库】

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, 常数项为_____ (用数字作答).
14. 已知圆 $C:(x-3)^2+y^2=25$, 直线 $l:(m+1)x+(m-1)y-2=0$ (m 是参数), 则直线 l 被圆 C 截得的弦长的最小值为_____.
15. 已知直线 l 与椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a > b > 0)$ 交于 M, N 两点, 线段 MN 中点 P 在直线

$x = -1$ 上, 且线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 $Q(-\frac{3}{4}, 0)$, 则椭圆 E 的离心率是_____.

16. 若过点 $P(1, m)$ ($m \in \mathbb{R}$) 有 3 条直线与函数 $f(x) = xe^x$ 的图象相切, 则 m 的取值范围是_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 【公众号: 快思维小初高学习资料库】

在平面直角坐标系 Oxy 中, 锐角 α, β 的顶点与坐标原点 O 重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 终边与单位圆 O 的交点分别为 P, Q . 已知点 P 的纵坐标为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$, 点 Q 的横坐标为 $\frac{13}{14}$.

(1) 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值;

(2) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c .

请从下面两个问题中任选一个作答, 如果多选, 则按第一个解答计分.

①若 $C = \alpha - \beta$, 且 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

②若 $A = \alpha, B = \beta$, 且 $c = 11$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

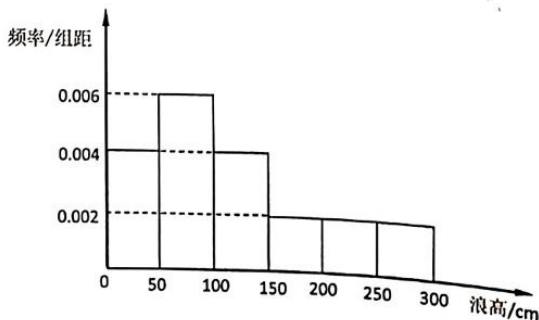
已知在递增数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2 为函数 $f(x) = x^2 - 11x + 24$ 的两个零点, 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 证明: $S_n < \frac{3}{4}$.

19. (12 分)

渔船海上外出作业受天气限制, 尤其浪高对渔船安全影响最大, 二月份是某海域风浪最平静的月份, 浪高一般不超过 3m. 某研究小组从前些年二月份各天的浪高数据中, 随机抽取 50 天数据作为样本, 制成频率分布直方图: (如右图)



根据浪高高度将海浪划分为如下等级:

| | | | | |
|---------|--------|----------|-----------|-----------|
| 浪高 (cm) | (0,50) | [50,100) | [100,200) | [200,300] |
| 海浪等级 | 微浪 | 小浪 | 中浪 | 大浪 |

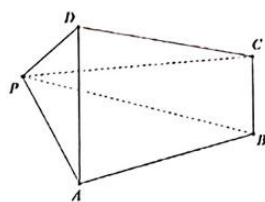
海事管理部门规定: 海浪等级在“大浪”及以上禁止渔船出海作业.

(1) 某渔船出海作业除受浪高限制外, 还受其他因素影响, 根据以往经验可知: “微浪”情况下出海作业的概率为 0.9, “小浪”情况下出海作业的概率为 0.8, “中浪”情况下出海作业的概率为 0.6, 请根据上面频率分布直方图, 估计二月份的某天各种海浪等级出

现的概率，并求该渔船在这天出海作业的概率；

(2) 气象预报预计未来三天内会持续“中浪”或“大浪”，根据以往经验可知：若某天是“大浪”，则第二天是“大浪”的概率为 $\frac{1}{2}$ ，

“中浪”的概率为 $\frac{1}{2}$ ；若某天是“中浪”，则第二天是“大浪”的概率为 $\frac{1}{3}$ ，“中浪”的概率为 $\frac{2}{3}$ 。现已知某天为“中浪”，记该天的后三天出现“大浪”的天数为 X ，求 X 的分布列和数学期望。



(第20题图)

20. (12分) 【公众号：快思维小初高学习资料库】

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 为等腰三角形， $PD=PA=5$ ， $AD \parallel BC$ ， $\angle BAD=90^\circ$ ， $AB=AD=2BC=8$ 。

(1) 证明： $BC \perp PC$ ；

(2) 若 $AB \perp AP$ ，点 M 在线段 PB 上， $PM = \frac{1}{3}PB$ ，求平面 DMC 与平面 PAD 夹角的余弦值。

21. (12分)

我们约定，如果一个椭圆的长轴和短轴分别是另一条双曲线的实轴和虚轴，则称它们互为“姊妹”圆锥曲线。已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < 2)$ ，双曲线 C_2 是椭圆 C_1 的“姊妹”圆锥曲线， e_1, e_2 分别为 C_1, C_2 的离心率，且 $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ，点 M, N 分别为椭圆 C_1 的左、右顶点。

(1) 求双曲线 C_2 的方程；

(2) 设过点 $G(4,0)$ 的动直线 l 交双曲线 C_2 右支于 A, B 两点，若直线 AM, BN 的斜率分别为 k_{AM}, k_{BN} 。

(i) 试探究 k_{AM} 与 k_{BN} 的比值 $\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$ 是否为定值。若是定值，求出这个定值；若不是定值，请说明理由；

(ii) 求 $w = k_{AM}^2 + \frac{2}{3}k_{BN}$ 的取值范围。

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{k}{x+1} (k \in \mathbf{R})$ 。

(1) 若 $f(x)$ 在定义域上具有唯一单调性，求 k 的取值范围；

(2) 当 $x \in (1,2)$ 时，证明： $(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})} - 2x^2 + x < 0$ 。

2023 届安徽省“江南十校”联考 数学试题评分参考

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 答案 | C | D | C | A | B | C | B | D |

1.C 【公众号：快思维小初高学习资料库】

【命题立意】本题考查不等式的解法、集合的交集、补集运算，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$$A = \{x | -1 < x < 3\}, \complement_{\mathbb{R}} B = \{x | x \leq 2\}, \therefore A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | -1 < x \leq 2\}, \text{ 故选 C}$$

2.D

【命题立意】本题考查复数的运算，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$$z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \text{ 故选 D}$$

3.C

【命题立意】本题考查向量的运算，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + 2\vec{b})^2} = \sqrt{2 + 36 - 4 \times \sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{26}, \text{ 故选 C}$$

4.A

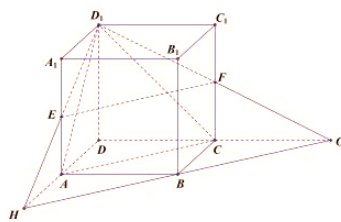
【命题立意】本题以数学文化中的中国古代建筑为背景考查异面直线所成角的求解问题，体现了直观想象的核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

如图所示，过 D_1, E, F 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线

$GH \parallel AC$ ，而 AC 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故选 A



5.B

【命题立意】本题考查利用排列组合知识解决相邻问题和插空问题，体现了逻辑推理和数学运算的核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

由题意得，不同的排法共有 $A_2^2 \cdot A_2^2 \cdot A_3^2 = 24$ 种，故选 B

6.C

【命题立意】本题考查三角变换的相关公式和三角函数的性质，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】中 【公众号：快思维小初高学习资料库】

【试题解析】

由题意得 $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{4}$,

由 $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi$ 得 $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的对称中心为 $(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}) (k \in \mathbb{Z})$, 所以 A, B 错误.

由 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, 则 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, C 正确, D 错误, 故选 C

7.B

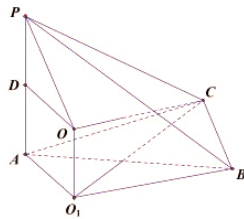
【命题立意】本题考查三棱锥外接球的综合问题，体现了直观想象、逻辑推理、数学运算的核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

如图所示，由 $CA = CB = 2$, $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$ 得 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2,

又 $PA \perp$ 底面 ABC , 取 PA 的中点 D , 由 $PD = 1$, $OD = 2$ 得 $R = \sqrt{5}$, 即三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径为 $\sqrt{5}$, 所以 $S = 4\pi R^2 = 20\pi$, 故选 B



8.D

【命题立意】本题考查利用函数的单调性比较大小问题，体现了数学抽象、数学运算等核心素养。

【试题难度】难

【试题解析】

构造函数 $y_1 = e^x + 1, y_2 = x + 2, y_3 = \ln x + 3$, 令 $f(x) = y_1 - y_2 = e^x - x - 1$, $g(x) = y_2 - y_3 = x - \ln x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1, g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, 所以 $f(0.9) > f(0) = 0$, 所以 $e^{0.9} > 1.9$, 所以 $a > b$. 同理 $b > c$, 所以选 D.

二、选择题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.)

| | | | | |
|----|----|----|-----|-----|
| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 答案 | AB | AC | BCD | ABC |

9. AB

【命题立意】 本题考查三次函数的性质，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】 易

【试题解析】

A 正确： 因为对 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = -x^3 + x = -f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数；

B 正确： 由 $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ 得 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ ；

C 错误： 因为 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，所以 $f(x)$ 无最大值；

D 错误： 由 $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，经检验 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点， $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点。

10.AC

【命题立意】 本题考查空间角、空间距离的计算，体现了数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】 中 【公众号：快思维小初高学习资料库】

【试题解析】

设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ ，则 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ ，且

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

A 正确： $\overrightarrow{A_1C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ ， $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$ ，

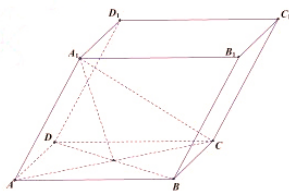
$$\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 - \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0;$$

B 错误： 因为 $|\overrightarrow{A_1C}|^2 = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ ，所以 $|\overrightarrow{A_1C}| = \sqrt{2}$ ；

C 正确： 因为 $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{BB_1} = (\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c}^2 = 0$ ，所以 $BB_1 \perp A_1C$ ；

D 错误： 因为 $BD \perp$ 平面 AA_1C ，所以平面 $AA_1C \perp$ 平面 $ABCD$ ，则 A_1C 与平面 $ABCD$ 所成的角为

$\angle A_1CA$ 。在 $Rt\triangle AA_1C$ 中， $AA_1 = 1$ ， $AC = \sqrt{3}$ ，所以 $\sin \angle A_1CA = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



11.BCD

【命题立意】 本题考查抛物线及其切线性质，体现了数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】 中

【试题解析】

A 错误： 将 AB 中点 $M(2a, a^2)$ 代入 $C: x^2 = 2py$ 得 $p = 2$ ，所以抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的准线方程为 $y = -1$ ；

B 正确： 将直线 OB 的方程 $y = ax$ 代入 $C: x^2 = 4y$ 得 $N(4a, 4a^2)$ ，所以 B 为 ON 中点；

C 正确： 抛物线 C 在点 N 处的切线方程为： $4ax = 2(4a^2 + y)$ ，令 $y = 0$ 得 $x = 2a$ ，所以直线 AN 为 C 的切线；

D 正确： 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 在 $M(2a, a^2)$ 处的切线方程为： $2ax = 2(a^2 + y)$ ，其斜率 $k = a$ 与直线 OB 的斜率相等，所以 C 在点 M 处的切线与直线 ON 平行。

12. ABC

【命题立意】本题考查抽象函数的对称性、周期性以及导函数的相关性质，体现了数学抽象、数学运算等核心素养。【公众号：快思维小初高学习资料库】

【试题难度】难

【试题解析】

A 正确：由 $g(2x+1)$ 为偶函数得 $g(2x+1) = g(-2x+1)$ ，则 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，即

$g(1+x) = g(1-x)$ ，两边同时求导得 $g'(1+x) = -g'(1-x)$ ，令 $x=0$ 得 $g'(1) = 0$ ；

B 正确：由 $g(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称得 $g(-x) = g(x+2)$ ，由 $f(x+3) = g(-x) + 4$ 得

$f(1-x) = g(x+2) + 4$ ，所以 $f(x+3) = f(1-x)$ ，即 $f(x)$ 关于直线 $x=2$ 对称；

C 正确：对 $f(x+3) = g(-x) + 4$ 两边同时求导得 $f'(x+3) = -g'(-x)$ ，由 $f'(x) + g'(1+x) = 0$ 得

$f'(-x-1) + g'(-x) = 0$ ，则 $f'(x+3) = f'(-x-1)$ ，所以 $f'(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称；

D 错误：由 $f(x+3) = f(1-x)$ 得 $f'(x+3) = -f'(1-x)$ ，所以函数 $f'(x)$ 的图像关于 $(2,0)$ 对称，结合 C 选项可知，4 是函数 $f'(x)$ 的一个周期，由 $f'(x) + g'(1+x) = 0$ 得，4 也是函数 $g'(x)$ 的一个周期，由 $g'(1) = 0$ 得 $f'(2) = g'(3) = f'(4) = 0$ ，所以 $\sum_{k=1}^{2023} f'(k)g'(k) = 0$ 。

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。）

13. 60

【命题立意】本题考查二项式定理，体现了数学运算的核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

$$(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 = 3\left(x+\frac{1}{x}\right)^6 + x\left(x+\frac{1}{x}\right)^6,$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项为：

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r x^{6-2r}, \text{ 当 } 6-2r=0 \text{ 即 } r=3 \text{ 时, } 3C_6^3=60,$$

所以 $(3+x)\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中，常数项为 60。

14. $4\sqrt{5}$

【命题立意】本题考查直线和圆的相关性质，体现了数学运算、直观想象核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

易知 l 过定点 $P(1,-1)$ ， $|PC| = \sqrt{5}$ ，当 $PC \perp l$ 时，弦长 $|AB|$ 取得最小值。此时

$$|AB| = 2\sqrt{25-5} = 4\sqrt{5}$$

15. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【命题立意】本题考查直线和椭圆的位置关系，体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 = -1$, 记坐标原点为 O , 直线 l , OP , PQ 的斜率分

别为 k_{MN}, k_{OP}, k_{PQ} , 又 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 两式相减整理可得 $-\frac{b^2}{a^2} = \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)} = \frac{2y_0}{2x_0} \cdot k_{MN}$, 即 $k_{MN}k_{OP} = -\frac{b^2}{a^2}$. 又

$k_{MN}k_{PQ} = -1$, 所以两式相比可得 $\frac{k_{OP}}{k_{PQ}} = \frac{b^2}{a^2}$, 即 $\frac{\frac{y_0}{x_0}}{\frac{y_0}{x_0 + \frac{3}{4}}} = \frac{b^2}{a^2}$, 代入 $x_0 = -1$, 整理可得 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 所以离心率

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$16. -\frac{5}{e^2} < m < 0$$

【命题立意】本题考查导数的几何意义, 曲线的切线方程, 体现了数形结合思想和数学运算的核心素养。【公众号: 快思维小初高学习资料库】

【试题难度】难

【试题解析】

设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则切线斜率 $k = (x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$, 所以切线方程为

$y - x_0 e^{x_0} = (x_0 + 1) \cdot e^{x_0} (x - x_0)$, 将 $P(1, m)$ 代入得 $m = (-x_0^2 + x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$. 存在三条切线, 即方程

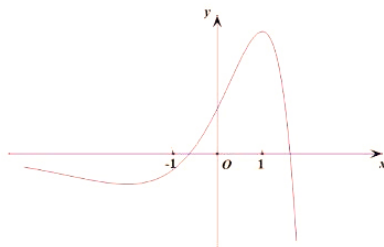
$m = (-x^2 + x + 1) \cdot e^x$ 有三个不等实数根. 设 $g(x) = (-x^2 + x + 1)e^x$, 又 $g'(x) = -(x-1)(x+2)e^x$,

易得在 $(-2, 1)$ 上, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 在 $(-\infty, -2)$

和 $(1, +\infty)$ 上, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或

$x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时, $g(x) < 0$, 画出图象可得 $g(-2) < m < 0$,

$$\text{即 } -\frac{5}{e^2} < m < 0$$



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 【命题立意】本题考查三角函数和解三角形相关知识. 以三角函数的定义为载体, 考查学生和差角公式的应用, 同时结合正余弦定理考查解三角形能力. 本题以基础知识和基本技能立意, 重点考查学生对基本概念和基本公式的掌握, 同时考查了学生的计算能力. 体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

(1) 由题意 P, Q 在单位圆上, 且在第一象限可得 $P(\frac{1}{7}, \frac{4\sqrt{3}}{7})$, $Q(\frac{13}{14}, \frac{3\sqrt{3}}{14})$,1 分

由三角函数定义知 $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \cos \alpha = \frac{1}{7}, \sin \beta = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \cos \beta = \frac{13}{14}$ 3分

故 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{7} \times \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}$ 5分

(2) (选①) 【公众号: 快思维小初高学习资料库】

方法1: 由(1)中结论可得 $\cos C = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi)$, $\therefore C = \frac{\pi}{3}$ 6分

由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 即 $4 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab$ 7分

$\therefore ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \therefore 4 \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2$,

$\therefore a+b \leq 4$, 当 $a=b=2$ 时等号成立.9分

$\therefore a+b+c \leq 6$.

即当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 周长最大, 最大值为 6.10分

方法2: 由(1)中结论可得角 $C = \alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ 且 $B = \frac{2\pi}{3} - A$6分

又由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 可得 $a = \frac{4\sqrt{3} \sin A}{3}, b = \frac{4\sqrt{3} \sin B}{3}$ 7分

故 $\triangle ABC$ 周长

$$\begin{aligned} a+b+c &= \frac{4\sqrt{3} \sin A}{3} + \frac{4\sqrt{3} \sin B}{3} + 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A + \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right) + 2 \\ &= 2\sqrt{3} \sin A + 2 \cos A + 2 = 4 \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \end{aligned} \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

$\therefore C = \frac{\pi}{3} \therefore 0 < A < \frac{2\pi}{3} \therefore \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \therefore A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $A = \frac{\pi}{3}$ 时,

$\triangle ABC$ 周长取最大值 6.10分

(选②)

由(1)可知 $\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \cos A = \frac{1}{7}, \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{14}, \cos B = \frac{13}{14}$

则 $\sin C = \sin(A+B) = \frac{55\sqrt{3}}{98}$ 7分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{98}{5\sqrt{3}}$, 可得 $a = \frac{56}{5}, b = \frac{21}{5}$ 9分

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times \frac{56}{5} \times \frac{21}{5} \times \frac{55\sqrt{3}}{98} = \frac{66\sqrt{3}}{5}$ 10分

18. 【命题立意】 本题考查了函数的零点、等差数列的定义、数列的通项.体现了数学运算、逻辑推理等核心素养。

【试题难度】易

【试题解析】

解：(1) 由 $\{a_n\}$ 递增及 $f(x)=0$ 得 $a_1=3, a_2=8$ ，则 $a_2-a_1=5$ ，.....1分

即 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 5 为首项，2 为公差的等差数列. 所以 $a_{n+1}-a_n=2n+3$2分

$$a_n - a_{n-1} = 2n + 1$$

$$a_{n-1} - a_{n-2} = 2n - 1$$

$$\dots\dots (n \geq 2)$$

$$a_3 - a_2 = 7$$

$$a_2 - a_1 = 5$$

相加得 $a_n - a_1 = 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$ 5分
 $a_n = 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$

经检验 $a_1=3$ 也满足上式，所以 $a_n = n(n + 2)$6分

(2) 由 (1) 得： 【公众号：快思维小初高学习资料库】

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right). \dots\dots 8分$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \dots\dots 11分 \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} > 0$ ，所以 $S_n < \frac{3}{4}$12分

19. 【命题立意】通过实际生活情境，考查频率分布直方图相关计算、全概率、分布列、期望，体现了数据分析、数学运算等核心素养。

【试题难度】中

【试题解析】

(1) 解：记这天浪级是“微浪”为事件 A_1 ，浪级是“小浪”为事件 A_2 ，浪级是“中浪”为事件 A_3 ，浪级是“大浪”为事件 A_4 。该渔船当天出海作业为事件 B ，则由题意可知：

$$P(A_1) = 0.2, P(A_2) = 0.3, P(A_3) = 0.3, P(A_4) = 0.2 \dots\dots 2分$$

$$\therefore P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \dots\dots 3分$$

$$= 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.3 + 0.6 \times 0.3 \dots\dots 4分$$

$$= 0.18 + 0.24 + 0.18$$

$$= 0.6 \dots\dots 5分$$

(2) 依题意可知， X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 36分

$$\therefore P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{27}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}, \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

则 X 的分布列为 【公众号：快思维小初高学习资料库】

| | | | | |
|-----|----------------|-----------------|---------------|----------------|
| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
| P | $\frac{8}{27}$ | $\frac{10}{27}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ |

.....11分

$$\text{数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{10}{27} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{121}{108}. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

20. 【命题立意】 本题考查线面垂直、面面垂直的判定与性质、平面与平面夹角余弦值的求解，体现了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养。

【试题难度】 中

【试题解析】

(1) 取 AD 的中点 O ，连接 OP, OC ，

$\therefore PA = PD, \therefore PO \perp AD$ ，

$\therefore AD = 2BC, \therefore OA = BC$ ，

$\therefore AO \parallel BC, \therefore$ 四边形 $ABCO$ 为平行四边形，.....2分

又 $\therefore \angle DAB = 90^\circ, \therefore CO \perp AD$ ，

又 $PO \cap OC = O, \therefore AD \perp$ 平面 POC ，

又 $AD \parallel BC, \therefore BC \perp$ 平面 POC ，

又 $PC \subset$ 平面 $POC, \therefore BC \perp PC$5分

(2) $\therefore AB \perp AD, AB \perp AP$ ，且 $AD \cap AP = A, \therefore AB \perp$ 平面 PAD ，

又 $AB \parallel OC$ ，则 $OC \perp$ 平面 PAD ，.....6分

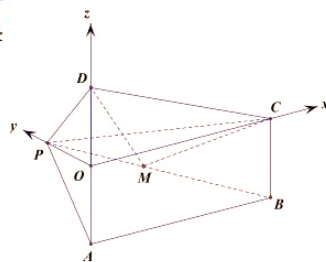
分别以 OC, OP, OD 所在的直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ，

又 $AD = 8$ ，则 $OD = 4, OC = AB = AD = 8$ ，

又 $PD = 5$ ，则 $OP = 3$ ，则 $A(0, 0, -4), B(8, 0, -4), C(8, 0, 0), D(0, 0, 4), P(0, 3, 0)$ ，

则有 $\overrightarrow{PB} = (8, -3, -4), \overrightarrow{DC} = (8, 0, -4)$ ，

$$\therefore \overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \left(\frac{8}{3}, -1, -\frac{4}{3}\right), \therefore \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{8}{3}, 2, -\frac{16}{3}\right), \dots\dots\dots 8 \text{分}$$



设平面 DMC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} \cdot \vec{m} = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \frac{8}{3}x + 2y - \frac{16}{3}z = 0 \\ 8x - 4z = 0 \end{cases}$$

令 $x=1$, 则平面 DMC 的一个法向量为 $\vec{m} = (1, 4, 2)$,10 分

又平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 0)$, 则 $|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{1}{\sqrt{21} \times \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$,

\therefore 平面 DMC 与平面 PAD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{21}$12 分

21. 【命题立意】(1) 本题是一道新定义问题, 考查学生探究能力和创新能力; (2) 本题考查了椭圆和双曲线的标准方程与离心率、双曲线的简单性质、直线与双曲线的位置关系、渐近线与双曲线的位置关系等。体现了数学运算、逻辑推理、直观形象等核心素养。

【试题难度】难 【公众号: 快思维小初高学习资料库】

【试题解析】(1) 由题意可设双曲线 $C_2: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$1 分

则 $e_1 e_2 = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2} \times \frac{\sqrt{4+b^2}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,2 分

解得 $b^2 = 1$.

所以双曲线 C_2 的方程为 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$3 分

(2) (i) (仅写出定值 $-\frac{1}{3}$ 给 1 分)

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $x = ty + 4$,

由
$$\begin{cases} x = ty + 4 \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \end{cases} \text{消元得 } (t^2 - 4)y^2 + 8ty + 12 = 0.$$

则 $t \neq \pm 2$, $\Delta > 0$, 且

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{8t}{t^2 - 4} \\ y_1 y_2 = \frac{12}{t^2 - 4} \end{cases} \text{5 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{k_{AM}}{k_{BN}} &= \frac{\frac{y_1}{x_1 + 2}}{\frac{y_2}{x_2 - 2}} = \frac{y_1}{x_1 + 2} \times \frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{y_1(ty_2 + 2)}{y_2(ty_1 + 6)} = \frac{ty_1 y_2 + 2y_1}{ty_1 y_2 + 6y_2} = \frac{ty_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) - 2y_2}{ty_1 y_2 + 6y_2} \\ &= \frac{\frac{12t}{t^2 - 4} - \frac{16t}{t^2 - 4} - 2y_2}{\frac{12t}{t^2 - 4} + 6y_2} = \frac{-\frac{4t}{t^2 - 4} - 2y_2}{\frac{12t}{t^2 - 4} + 6y_2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

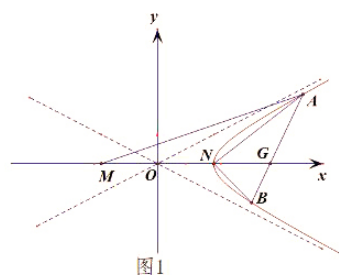


图1

或 由韦达定理可得 $\frac{y_1+y_2}{y_1y_2} = -\frac{2t}{3}$, 即 $ty_1y_2 = -\frac{3}{2}(y_1+y_2)$.

$$\therefore \frac{k_{AM}}{k_{BN}} = \frac{\frac{y_1}{x_1+2}}{\frac{y_2}{x_2-2}} = \frac{y_1}{x_1+2} \times \frac{x_2-2}{y_2} = \frac{y_1(ty_2+2)}{y_2(ty_1+6)} = \frac{ty_1y_2+2y_1}{ty_1y_2+6y_2} = \frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+2y_1}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+6y_2} = \frac{y_1-3y_2}{-3y_1+9y_2} = -\frac{1}{3}$$

即 k_{AM} 与 k_{BN} 的比值定值 $-\frac{1}{3}$. 【公众号: 快思维小初高学习资料库】8分

(ii)方法1: 设直线 $AM: y = k(x+2)$, 代入双曲线方程并整理得 $(1-4k^2)x^2 - 16k^2x - 16k^2 - 4 = 0$ ($1-4k^2 \neq 0$).

由于点 M 为双曲线的左顶点, 所以此方程有一根为 -2 .

由韦达定理得: $-2x_A = \frac{-16k^2-4}{1-4k^2}$, 解得 $x_A = \frac{2(4k^2+1)}{1-4k^2}$.

因为点 A 在双曲线的右支上, 所以 $x_A = \frac{2(4k^2+1)}{1-4k^2} > 0$,

解得 $k \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 即 $k_{AM} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$9分

同理可得 $k_{BN} \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$10分

由 (i) 中结论可知 $k_{BN} = -3k_{AM} \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, 得 $k_{AM} \in (-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, +\infty)$.

所以 $k_{AM} \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$11分

故 $w = k_{AM}^2 + \frac{2}{3}k_{BN} = k_{AM}^2 + \frac{2}{3}(-3k_{AM}) = k_{AM}^2 - 2k_{AM} \in (-\frac{3}{4}, -\frac{11}{36}) \cup (\frac{13}{36}, \frac{5}{4})$12分

方法2: 由于双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 如图

2, 过点 M 作两渐近线的平行线 l_1 与 l_2 , 由于点 A 在双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右支上, 所以直线 AM 介于直线 l_1 与 l_2 之间 (含 x 轴, 不含直线 l_1 与 l_2), 所以

$k_{AM} \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$9分

同理, 如图3, 过点 N 作两渐近线的平行线 l_3 与 l_4 , 由于点 B 在双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的右支上, 所以直线 BN 介于直线 l_3 与 l_4 之间 (不含 x 轴, 不含直线 l_3 与 l_4),

所以 $k_{BN} \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$10分

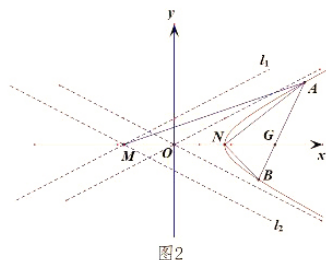


图2

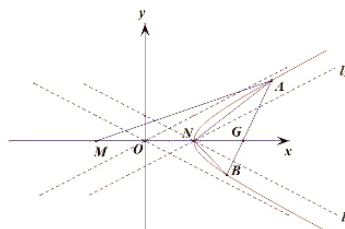


图3

由 (i) 中结论可知 $k_{BN} = -3k_{AM} \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, 得 $k_{AM} \in (-\infty, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, +\infty)$,

所以 $k_{AM} \in (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$11 分

故 $w = k_{AM}^2 + \frac{2}{3}k_{BN} = k_{AM}^2 + \frac{2}{3}(-3k_{AM}) = k_{AM}^2 - 2k_{AM} \in (-\frac{3}{4}, -\frac{11}{36}) \cup (\frac{13}{36}, \frac{5}{4})$12 分

22. 【命题立意】 本题考查导函数的应用和不等式的证明, 突出了创新能力和函数同构思想。体现了逻辑推理、数学抽象、数学运算等核心素养。【公众号: 快思维小初高学习资料库】

【试题难度】 难

【试题解析】

(1) 由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{k}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - kx}{x(x+1)^2}. \quad \dots\dots 1 \text{ 分}$$

若 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $k \leq x + \frac{1}{x} + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 又

$$x + \frac{1}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 2 = 4, \quad \therefore k \leq 4. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

若 $f(x)$ 在定义域上单调递减, 则 $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 即 $k \geq x + \frac{1}{x} + 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 而这样的 k 不存在.

综上所述: $f(x)$ 在定义域上单调递增, 且 $k \leq 4$5 分

(2) 方法一: 要证 $(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})} - 2x^2 + x < 0$ 成立,

$$\text{只需证 } e^{2(x-\frac{1}{x})} < \frac{2x^2-x}{2-x}, \quad \text{只需证 } 2(x-\frac{1}{x}) < \ln \frac{2x^2-x}{2-x}, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{只需证 } 2(x-\frac{1}{x}) < \ln \frac{2x-1}{\frac{2}{x}-1}, \quad \text{只需证 } \ln(\frac{2}{x}-1) + 2x < \ln(2x-1) + \frac{2}{x}, \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{当 } k=4 \text{ 时, } f(x) = \ln x + \frac{4}{x+1}, \quad \therefore \text{原不等式即证 } f(2x-1) > f(\frac{2}{x}-1), \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore x \in (1, 2) \quad \therefore 2x-1 > 0, \frac{2}{x}-1 > 0,$$

$$\text{又 } 2x-1 > \frac{2}{x}-1, \text{ 则 } f(2x-1) > f(\frac{2}{x}-1),$$

\therefore 原不等式成立.12 分

方法二: 要证 $(2-x)e^{2(x-\frac{1}{x})} - 2x^2 + x < 0$ 成立,

$$\text{只需证 } e^{2(x-\frac{1}{x})} < \frac{2x^2-x}{2-x}, \quad \text{只需证 } 2(x-\frac{1}{x}) < \ln \frac{2x^2-x}{2-x}, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

只需证 $\ln(2x^2-x) - \ln(2-x) > 2x - \frac{2}{x}$,

令 $g(x) = \ln(2x^2-x) - \ln(2-x) - 2x + \frac{2}{x}$,

则 $g'(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x} + \frac{1}{2-x} - 2 - \frac{2}{x^2}$ 7分

$= \frac{4(x-1)^2(x^2-x+1)}{x^2(2x-1)(2-x)} > 0$. 【公众号: 快思维小初高学习资料库】10分

$\therefore g(x)$ 在 $x \in (1,2)$ 上单调递增, $\therefore g(x) > g(1) = 0$,

$\ln(2x^2-x) - \ln(2-x) - 2x + \frac{2}{x} > 0$, \therefore 原不等式成立.12分

以上各解答题如有不同解法并且正确,请按相应步骤给分。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

