

蚌埠市 2023 届高三年级第四次教学质量检查考试

数 学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 2\}$, $B = \{y | y = 2^x, x \in A\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $(0, 2)$ B. $(-2, 4)$ C. $(\frac{1}{4}, 2)$ D. $(-2, +\infty)$

2. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $(1 + \sqrt{3}i)\bar{z} = \sqrt{3} + i$, 则 $z =$

- A. $-i$ B. $\sqrt{3} - i$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 + a_4 + a_6 = \pi$, 则 $\cos(a_1 + a_7) =$

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 已知实数 a, b, c 满足 $a < b < c$ 且 $abc < 0$, 则下列不等关系一定正确的是

- A. $ac < bc$ B. $ab < ac$ C. $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 2$ D. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$

5. 将顶点在原点,始边为 x 轴非负半轴的锐角 α 的终边绕原点顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后,交单位圆于

点 $P(x, -\frac{3}{5})$, 那么 $\sin\alpha =$

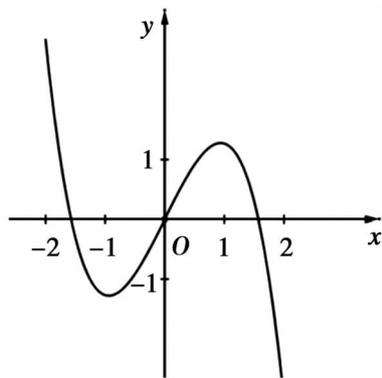
- A. $\frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}$ B. $\frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$ C. $\frac{-3 - 4\sqrt{3}}{10}$ D. $\frac{-3 + 4\sqrt{3}}{10}$

6. 如图是函数 $F(x)$ 图象的一部分,设函数 $f(x) = \cos x$, $g(x) = e^x - e^{-x}$, 则 $F(x)$ 可以是

- A. $f(x) + g(x)$ B. $f(x) \cdot g(x)$
C. $f(x) - g(x)$ D. $\frac{f(x)}{g(x)}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\vec{BD} = \vec{DC}$, $\vec{CE} = 2\vec{EA}$. 若 $\vec{AB} = x\vec{AD} + y\vec{BE}$, 则 $x + y =$

- A. $-\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{4}$
C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$



(第 6 题图)

8. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F , 过点 F 的直线 l_1, l_2 分别与双曲线 C 的

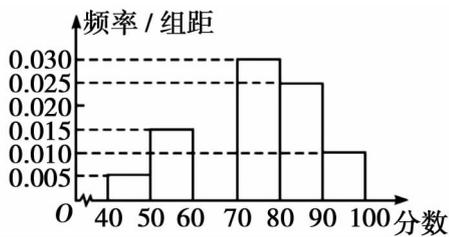
渐近线平行, l_1, l_2 与渐近线的交点记为 A, B , 若 $\triangle ABF$ 为等边三角形, 且面积为 $\sqrt{3}$, 则 $a =$

- A. $3\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 3 D. 2

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求.

全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某校在开展的“体育节”活动中, 为了解学生对“体育节”的满意程度, 组织学生给活动打分(分数为整数, 满分 100 分), 发现分数均在 $[40, 100]$ 内. 从中随机抽取一个容量为 300 的样本, 并将这些数据分成 6 组并作出样本的频率分布直方图, 但不小心污损了部分图形(如图所示), 则下列说法中正确的是



(第 9 题图)

- A. 样本中分数落在 $[60, 70)$ 的频数为 60 人
 B. 样本的众数为 75 分
 C. 样本的平均数为 73.5 分
 D. 样本的 80 百分位数为 85 分

10. 袋中有大小相同的 8 个小球, 其中 5 个红球, 3 个蓝球. 每次从袋子中随机摸出 1 个球, 摸出的球不再放回. 记“第一次摸球时摸到红球”为事件 A_1 , “第一次摸球时摸到蓝球”为事件 A_2 ; “第二次摸球时摸到红球”为事件 B_1 , “第二次摸球时摸到蓝球”为事件 B_2 , 则下列说法正确的是

- A. $P(B_1) = \frac{5}{8}$ B. $P(A_2 B_2) = \frac{3}{28}$
 C. $P(B_1 | A_1) = \frac{4}{7}$ D. $P(B_1 | A_2) + P(B_2 | A_2) = 1$

11. 已知正方体 $ABCD - A_1 B_1 C_1 D_1$ 的棱长为 6, 点 E, F 分别是棱 AD, DD_1 的中点, M 是棱 AB 上的动点, 则

- A. 直线 CC_1 与 BF 所成角的正切值为 $\sqrt{2}$ B. 直线 $EF \parallel$ 平面 $ABC_1 D_1$
 C. 平面 $EFM \perp$ 平面 $A_1 B_1 C D$ D. B_1 到直线 EF 的距离为 $\frac{3\sqrt{34}}{2}$

12. 设定义在 \mathbb{R} 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导数分别为 $f'(x)$ 与 $g'(x)$, 已知 $f(x) = g(2-x) + 1$, $f'(x-2) = g'(x)$, 且 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 则下列结论一定成立的是

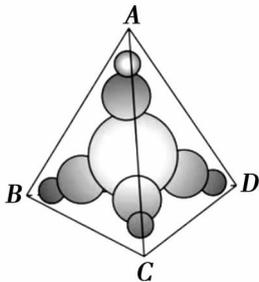
- A. 函数 $g'(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称 B. 函数 $g'(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称
 C. 函数 $g'(x)$ 的一个周期为 8 D. 函数 $g'(x)$ 为奇函数

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

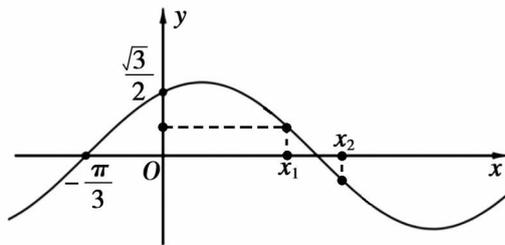
13. 已知向量 $a = (2, 1), b = (3, 4)$, 则 a 在 b 上的投影向量为 _____ . (用坐标表示)

14. 如今中国被誉为“基建狂魔”, 可谓逢山开路, 遇水架桥. 公路里程、高铁里程双双都是世界第一. 建设过程中研制出用于基建的大型龙门吊、平衡盾构机等国之重器更是世界领先. 如图是某重器上一零件结构模型, 中间最大球为正四面体的内切球, 中等球与最大球

和正四面体三个面均相切,最小球与中等球和正四面体三个面均相切. 若 $AB = 12$, 则该模型中最小球的半径为_____.



(第 14 题图)



(第 16 题图)

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线为 l , 点 M 在 l 上, 点 A, B 在 C 上, 若 A, B, F 三点共线, 且 $MF \perp AB$, $\triangle MFA$ 的外接圆交 l 于点 M, P , $\triangle MFB$ 的外接圆交 l 于点 M, Q , 则 $\frac{|MP| \cdot |MQ|}{|AF| \cdot |BF|} =$ _____.

16. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 若 $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且 $f(x_1) = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 则 $x_1 + x_2 =$ _____, $\cos(x_2 - x_1) =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 个小题, 共 70 分. 解答应写出说明文字、演算式、证明步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $2\sin^2 A - 2\sin^2 B + 2\sin B \sin C = 1 - \cos 2C$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $6\sqrt{3}$, 点 D 在边 BC 上, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 且 $AD = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$, $a_1 = 2, \frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_n} = 1, a_{n+1} = 2b_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\left\{\frac{n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

某省高考改革新方案, 不分文理科, 高考成绩实行“3+3”的构成模式, 第一个“3”是语文、数学、外语, 每门满分 150 分, 第二个“3”由考生在思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 个科目中自主选择其中 3 个科目参加等级性考试, 每门满分 100 分, 高考录取成绩卷面总分满分 750 分. 为了调查学生对物理、化学、生物的选考情况, 将“某市某一届学生在物理、化学、生物三个科目中至少选考一科的学生”记作学生群体 S , 从学生群体 S 中随机抽

取 100 名学生进行调查,他们选考物理,化学,生物的科目数及人数统计如表:

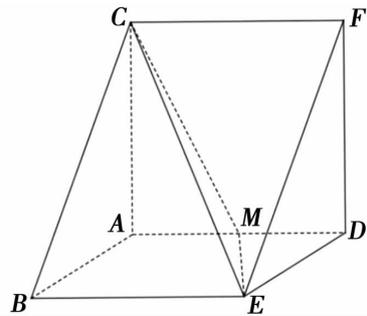
选考物理、化学、生物的科目数	1	2	3
人 数	10	40	50

- (1) 从这 100 名学生中任选 2 名,求他们选考物理、化学、生物科目数量相等的概率;
- (2) 从这 100 名学生中任选 2 名,记 X 表示这 2 名学生选考物理、化学、生物的科目数量之差的绝对值,求随机变量 X 的数学期望;
- (3) 用频率估计概率,现从学生群体 S 中随机抽取 4 名学生,将其中恰好选考物理、化学、生物中的两科目的学生数记作 Y ,求事件“ $Y \geq 2$ ”的概率.

20. (本小题满分 12 分)

已知三棱柱 $ABC - DEF$ 中,侧面 $ADFC$ 是正方形,底面 ABC 是等腰直角三角形,且 M 为线段 AD 中点, $AC = AB = 2, \angle ABE = 60^\circ$.

- (1) 求证:平面 $CEM \perp$ 平面 $ADFC$;
- (2) 在线段 CE 上是否存在点 P ,使得平面 ABP 与平面 CEM 夹角为 θ ,且满足 $\cos \theta = \frac{3\sqrt{285}}{95}$? 若不存在,请说明理由;若存在,求出 CP 的长度.



(第 20 题图)

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A, B 分别为椭圆 C 的上、下顶点,且 $|AB| = 2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 交于 M, N 两点(异于点 A, B),且 $\triangle OMN$ 的面积为 $\sqrt{2}$,过点 A 作直线 $AT \parallel OM$,交椭圆 C 于点 T ,求证: $BT \parallel ON$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 1 - \cos x$.

- (1) 证明: $f(x) \leq \frac{x^2}{2}$;
- (2) 证明: 函数 $h(x) = a \ln(x + 1) - f(x) (0 < a < 1)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点 x_0 , 且 $x_0 > \sqrt{4a + 1} - 1$.