

2020—2021 学年北京市高三年级学科综合能力测试

数 学

本试卷共 5 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x | x(2-x) \geq 0\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{1, 2\}$ (B) $\{1, 3\}$
(C) $\{2, 3\}$ (D) $\{1, 2, 3\}$

(2) 已知 $a = \log_3 2$, $b = 2^{0.1}$, $c = 3^{\frac{1}{2}}$, 则

- (A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$
(C) $b > c > a$ (D) $c > b > a$

(3) 在复平面内,复数 $z = \sin\theta + i\cos\theta$ 对应的点位于第二象限,则角 θ 的终边在

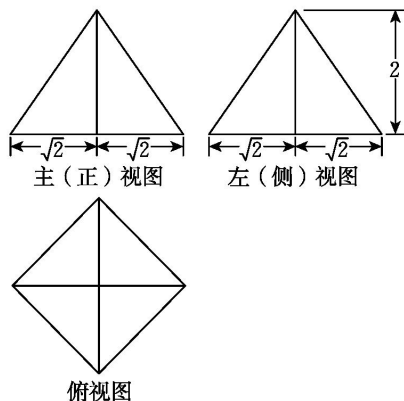
- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(4) 在 $(x - \sqrt{2})^4$ 的展开式中, x^2 的系数为

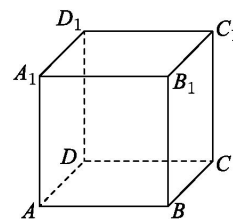
- (A) 6 (B) 12
(C) 24 (D) 48

(5) 某四棱锥的三视图如图所示,该四棱锥的最长棱为

- (A) 2
(B) $2\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{6}$
(D) 4



- (6) 已知函数 $f(x) = |x-1| + a|x+1|$, 则“ $a = -1$ ”是“ $f(x)$ 为奇函数”的
- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件
- (7) 已知直线 $l: ax + by - 3 = 0$ 经过点 $(a, b-2)$, 则原点到点 $P(a, b)$ 的距离可以是
- (A) 4 (B) 2
(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$
- (8) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 已知 $a_1 = -5, a_3 = -1$. 记 $b_n = \frac{S_n}{a_n} (n = 1, 2, \dots)$, 则数列 $\{b_n\}$ 的
- (A) 最小项为 b_3
(B) 最大项为 b_3
(C) 最小项为 b_4
(D) 最大项为 b_4
- (9) 抛物线 $W: y^2 = 8x$ 的焦点为 F . 对于 W 上一点 P , 若 W 的准线上只存在一个点 Q , 使得 $\triangle FPQ$ 为等腰三角形, 则点 P 的横坐标为
- (A) 2 (B) 4
(C) 5 (D) 6
- (10) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在正方形 ADD_1A_1 内, 且不在棱上, 则
- (A) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $PQ \parallel AC$
(B) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $PQ \perp AC$
(C) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得平面 $PQC_1 \parallel$ 平面 ABC
(D) 在正方形 DCC_1D_1 内一定存在一点 Q , 使得 $AC \perp$ 平面 PQC_1



第二部分(非选择题 共110分)

二、填空题共5小题,每小题5分,共25分。

(11) 函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域为_____.

(12) 已知双曲线 $W: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ (其中 $a > 0$) 的渐近线方程为 $y = \pm x$, 则 $a =$ _____, W 的右焦点坐标为_____.

(13) 已知平面向量 $\mathbf{a} = (1, 2)$ 与 $\mathbf{b} = (3, x)$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $x =$ _____.

(14) 已知函数 $f(x) = \sin 2x$. 若非零实数 a, b , 使得 $f(x+a) = bf(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 都成立, 则满足条件的一组值可以是 $a =$ _____, $b =$ _____. (只需写出一组)

(15) 已知曲线 $W_1: x^2 + y^2 = m^2$, $W_2: x^4 + y^2 = m^2$, 其中 $m > 0$.

- ① 当 $m = 1$ 时, 曲线 W_1 与 W_2 有4个公共点;
- ② 当 $0 < m < 1$ 时, 曲线 W_1 围成的区域面积大于曲线 W_2 围成的区域面积;
- ③ $\exists m > 1$, 曲线 W_1 围成的区域面积等于 W_2 围成的区域面积;
- ④ $\forall m > 0$, 曲线 W_1 围成的区域内整点(即横、纵坐标均为整数的点)个数不少于曲线 W_2 围成的区域内整点个数.

其中, 所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共6小题, 共85分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

(16) (本小题14分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = -\frac{1}{8}$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(I) $\sin B$ 的值;

(II) $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a = 4, c = 6$;

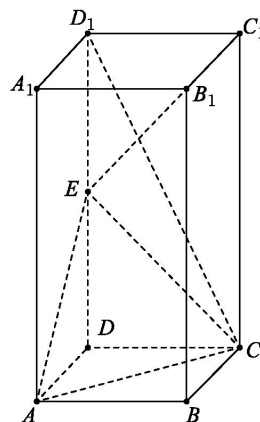
条件②: $a = 4, \triangle ABC$ 为等腰三角形.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

(17)(本小题 14 分)

如图,长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1, AA_1 = 2$,
点 E 为 DD_1 的中点.

- (I) 求证: $BD_1 \parallel$ 平面 ACE ;
(II) 求证: $EB_1 \perp$ 平面 ACE ;
(III) 求二面角 $A - CE - C_1$ 的余弦值.



(18)(本小题 14 分)

某电商平台联合手机厂家共同推出“分期购”服务,付款方式分为四个档次:1 期、2 期、3 期和 4 期. 记随机变量 x_1, x_2 分别表示顾客购买 H 型手机和 V 型手机的分期付款期数,根据以往销售数据统计, x_1 和 x_2 的分布列如下表所示:

x_1	1	2	3	4
P	0.1	0.4	0.4	0.1
x_2	1	2	3	4
P	0.4	0.1	0.1	0.4

- (I) 若某位顾客购买 H 型和 V 手机各一部,求这位顾客两种手机都选择分 4 期付款的概率;
(II) 电商平台销售一部 V 型手机,若顾客选择分 1 期付款,则电商平台获得的利润为 300 元;若顾客选择分 2 期付款,则电商平台获得的利润为 350 元;若顾客选择分 3 期付款,则电商平台获得的利润为 400 元;若顾客选择分 4 期付款,则电商平台获得的利润为 450 元. 记电商平台销售两部 V 型手机所获得的利润为 X (单位:元),求 X 的分布列;
(III) 比较 $D(x_1)$ 与 $D(x_2)$ 的大小. (只需写出结论)

(19)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + a$.

(I) 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(II) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的最大值;

(III) 请直接写出 $f(x)$ 的零点个数.

(20)(本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + y^2 = 1$.

(I) 求椭圆 C 的离心率;

(II) 经过原点的直线与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 直线 PM 与直线 PQ 垂直, 且与椭圆 C 的另一个交点为 M .

(i) 当点 M 为椭圆 C 的右顶点时, 求证: $\triangle PQM$ 为等腰三角形;

(ii) 当点 P 不是椭圆 C 的顶点时, 求直线 PQ 和直线 QM 的斜率之比.

(21)(本小题 15 分)

对于给定的区间 $[m, t]$ 和非负数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_k$, 若存在 $x_0, x_1, \dots, x_k$, 使 $|x_i - x_{i-1}| = a_i$ 成立, 其中 $x_i \in [m, t], i=0, 1, \dots, k$, 则称数列 A 可“嵌入”区间 $[m, t]$.

(I) 分别指出下列数列是否可“嵌入”区间 $[0, 2]$;

① $A_1: 2, 3$; ② $A_2: 1, 0, 1$.

(II) 已知数列 A 满足 $a_n = n (n=1, 2, \dots, k)$, 若数列 A 可“嵌入”区间 $[1, m_0] (m_0 \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 A 的项数 k 的最大值;

(III) 求证: 任取数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ 满足 $a_i \in [0, 1] (i=1, 2, \dots, 2021)$, 均可以“嵌入”区间 $[0, 2]$.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

高三年级学科综合能力测试(数学) 第 5 页(共 5 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》