THUSSAT 中学生标准学术能力测试

# 中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 11 月测试

## 文科数学 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | C | C | C | A | D | D | A | C | B | A |

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. $\frac{1}{3}$　　14. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　15. $\left(0,\frac{e^2}{4}\right]$　　16. $\frac{5}{7}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. （12 分）

解：

（1）设数列$\{a_n\}$的公比为$q\neq 0$，则$a_3=q^2$，$a_4=q^3$，$a_5=q^4$

$\therefore 4q^4-q^7+q^6=0$，$\therefore q^3-q^2-4=0$……3 分

又$(q-2)(q^2+q+2)=0$，$\because q^2+q+2\neq 0$无实数根

$\therefore q-2=0$，$\therefore q=2$

$\therefore a_n=2^{n-1}$……6 分

（2）$\because a_m=2^{m-1}$，$S_m=\frac{1-2^m}{1-2}=2^m-1$

$\therefore 4\times 2^{2m-2}-2^m+1=57$……9 分

令$2^m=x$，$\therefore x^2-x-56=0$

$\therefore x=8$或$x=-7$（舍去）

$\therefore 2^m=8$，$\therefore m=3$……12 分

18. （12 分）

解：

THUSSAT 中学生标准学术能力测试

(1) 若选择回归方程 $y=a\cdot b^x$，则 $\ln y=\ln a+x\ln b$

设 $\ln y=\omega$，则 $\omega=(\ln b)x+\ln a$

由表中数据可得：

$$r_1=\frac{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(\omega_i-\bar{\omega})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(\omega_i-\bar{\omega})^2}}=\frac{76}{\sqrt{4000}\times\sqrt{1.6}}=\frac{76}{80}=0.95$$ ……………2 分

若选择回归方程 $y=a+bx^2$，设 $x^2=u$，则 $y=bu+a$

由表中数据可得：

$$r_2=\frac{\sum_{i=1}^{8}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(u_i-\bar{u})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{6\times10^5}{\sqrt{3\times10^8}\times\sqrt{1296}}\approx0.96$$ …………………4 分

$\because r_2>r_1$，所以选择回归方程 $y=a+bx^2$ 更合适………………………………….…5 分

(2) 由 (1) 可得回归方程为 $y=a+bx^2$，设 $x^2=u$，则 $y=bu+a$

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{8}(u_i-\bar{u})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{8}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{6\times10^5}{3\times10^8}=0.002$$ ……………………………………8 分

则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{u}=35.7-0.002\times18750=-1.8$

$\therefore \hat{y}=-1.8+0.002u$

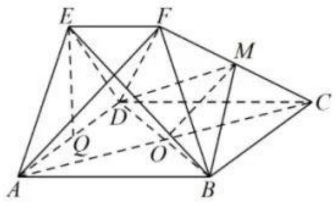
所以体重 $y$ 千克与身高 $x$ 厘米的回归方程 $\hat{y}=-1.8+0.002x^2$ …………………..10 分

(3) 由 (2) 可得当身高为 170 厘米时体重为 $-1.8+0.002\times170^2=56$ 千克

又 $56\times0.8=44.8$ 千克，$56\times1.2=67.2$ 千克

所以体重应该控制在 44.8 千克到 67.2 千克之间较为合适……………………...12 分

19. (12 分)




证明：

(1) 连接 $AC$ 交 $BD$ 于 $O$，连接 $OM$

$\because AO=OC$，$CM=MF$

$\therefore OM$ 为$\triangle ACF$ 的中位线……………………………………………………3 分

$\therefore OM // AF$，又 $OM$ 在平面 $BMD$ 内，$AF$ 不在平面 $BMD$ 内

$\therefore AF //$ 平面 $MBD$……………………………………………………………5 分

（2）$\because AB // DC$，$\therefore AB //$ 平面 $EFCD$

又平面 $ABFE \cap$ 平面 $EFCD=EF$，$\therefore AB // EF$，$\therefore EF // DC$

又 $EF = \frac{1}{2}DC = 1$，所以四边形 $EFCD$ 为梯形

$\therefore S_{\Delta EDF} = \frac{1}{2}S_{\Delta FDC} = S_{\Delta MDC}$

$\therefore V_{E-FBD} = V_{B-FED} = V_{B-MDC} = V_{M-BDC}$……………………………………8 分

取棱 $AD$ 的中点 $Q$，并连接 $EQ$

$\because \triangle ADE$ 为正三角形，$\therefore EQ \perp AD$

又平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $AED \cap$ 平面 $ABCD=AD$

$\therefore EQ \perp$ 平面 $ABCD$，且 $EQ = \sqrt{3}$

又 $EF //$ 平面 $ABCD$

所以点 $F$ 到平面 $ABCD$ 的距离等于点 $E$ 到平面 $ABCD$ 的距离，而点 $M$ 到平面 $ABCD$ 的距离又等于点 $F$ 到平面 $ABCD$ 的距离的一半，即为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$…………10 分

又 $S_{\Delta BDC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

$\therefore V_{M-BDC} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore V_{B-EDF} = \frac{\sqrt{3}}{3}$……………………………………………………………12 分

20. （12 分）

解：

（1）$\because |PM| = |PF| = |FM|$

$\therefore \triangle PFM$ 为等边三角形，$\therefore \angle FMP = \angle PFM = 60^\circ$…………………………1 分

又 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FP} = |FM| \cdot |FP| \cos\angle PFM = |FM|^2 \cos 60^\circ = 2$，$\therefore |FM| = 2$…………3 分

设直线$l$交Y轴于$N$点，则在Rt△$MNF$中$\angle NMF=30^\circ$，$|NF|=1=p$

$\therefore$ $C$的方程为$x^2=2y$……………………………………………………4分

（2）设点$Q(a,b)(a\neq 0,b\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

又$C$的方程为$x^2=2y$可化为$y=\dfrac{x^2}{2}$，$\therefore$ $y'=x$

所以过点$A$且与$C$相切的直线的斜率为$x_1$，过点$B$且与$C$相切的直线的斜率为$x_2$，

所以直线$QA$的方程为$y-y_1=x_1(x-x_1)$

直线$QB$的方程为$y-y_2=x_2(x-x_2)$……………………………………………6分

又直线$QA$与$QB$均过点$Q$，$\therefore$ $b-y_1=x_1(a-x_1)$，$b-y_2=x_2(a-x_2)$

又$x_1^2=2y_1$，$x_2^2=2y_2$，$\therefore$ $y_1=ax_1-b$，$y_2=ax_2-b$

所以直线$AB$的方程为$y=ax-b$……………………………………………………8分

联立方程$y=ax-b$和$x^2=2y$得方程组$\begin{cases}x^2=2y,\\ y=ax-b,\end{cases}$消去$y$得$x^2-2ax+2b=0$

$\because b\neq 0$ $\therefore$ $x_1\neq 0,x_2\neq 0$

$\therefore$ $x_1x_2=2b$……………………………………………………………10分

又$S(0,b)$，则直线$AS$的斜率$k_1=\dfrac{y_1-b}{x_1}$；直线$BS$的斜率$k_2=\dfrac{y_2-b}{x_2}$

$\therefore$ $k_1+k_2=\dfrac{(x_1+x_2)\left(\dfrac{x_1x_2}{2}-b\right)}{x_1x_2}$ $\because\dfrac{x_1x_2}{2}-b=0$，$\therefore$ $k_1+k_2=0$

所以直线$AS$与直线$BS$关于Y轴对称……………………………………………12分

21．（12分）

解：

（1）$\because g(x)=\sin x\cdot\tan x+3\cos x$，又$g'(x)=\dfrac{-\sin x\cdot\cos 2x}{\cos^2 x}$

当$g'(x)>0$时，又$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\therefore$ $\sin x>0$，$\therefore$ $\cos 2x<0$，$\therefore$ $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$

当 $g'(x)<0$ 时，$\cos 2x>0$，$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$ ……………………………………3 分

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减

$\therefore g(x)$ 的最小值为 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$ ……………………………………5 分

（2）不等式 $f(x)\geq x^2$ 等价于 $f(x)-x^2\geq 0$

令 $h(x)=f(x)-x^2=\sin x\cdot\tan x-x^2$

$\therefore h'(x)=\sin x\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)-2x\geq\sin x\cdot\frac{2\cos x}{\cos^2 x}-2x$

$=\frac{2\sin x}{\cos x}-2x=2(\tan x-x)$ ……………………………………8 分

令 $k(x)=\tan x-x$，$\therefore k'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

又 $0<\cos^2 x<1$，$\therefore\frac{1}{\cos^2 x}>1$

$\therefore k'(x)>0$，所以函数 $k(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

又 $k(0)=0$，$\therefore k(x)>0$ ……………………………………11 分

$\therefore h'(x)>0$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

又 $h(0)=0$，$\therefore h(x)\geq 0$

所以原不等式成立……………………………………12 分

（二）选考题：共 **10** 分，请考生在第 **22**、**23** 题中任选一道题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

解：

（1）对方程 $\begin{cases}x=t+1,\\y=2t+2,\end{cases}$ 消去参数 $t$ 可得 $y=2(x-1)+2=2x$ ……………………2 分

将 $y=\rho\sin\theta$，$x=\rho\cos\theta$ 代入方程 $y=2x$

可得直线 $l$ 的极坐标方程为 $\tan\theta=2$ ……………………………………5 分

（2）将极坐标方程 $\rho\cos^2\theta+8\cos\theta-\rho=0$ 的两边同乘以 $\rho$

可得 $\rho^2\cos^2\theta+8\rho\cos\theta-\rho^2=0$，又 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$

$\therefore$ C 的直角坐标方程为 $x^2+8x-x^2-y^2=0$ 即 $y^2=8x$ ……………………8 分

联立方程 $y^2=8x$ 和 $y=2x$ 得方程组 $\begin{cases} y=2x, \\ y^2=8x, \end{cases}$ 解之得 $x=0$ 或 $x=2$

$\therefore A(0,0)$，$B(2,4)$，$\therefore |AB|=2\sqrt{5}$ ……………………………………10 分

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

解：

（1）$f(x)\le 0$ 等价于 $|3x-1|\le|x-1|$

将不等式两边平方可得 $(3x-1)^2\le(x-1)^2$ ……………………………………3 分

解不等式 $2x^2-x\le 0$ 得 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ……………………………………5 分

（2）解：$\because f(x)=\begin{cases} 2x & x\ge a, \\ 4x-2a & \frac{a}{3}<x<a, \\ -2x & x\le\frac{a}{3}, \end{cases}$ ……………………………………6 分

当 $x\ge a$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $2a$

当 $\frac{a}{3}<x<a$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{2a}{3}$

当 $x\le\frac{a}{3}$ 时，$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{2a}{3}$

又 $-\frac{2a}{3}<2a$，所以函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{2a}{3}$ ……………………………………8 分

所以不等式 $f(x)+|a-1|\ge 0$ 成立只需 $-\frac{2a}{3}+|a-1|\ge 0$ ……………………………9 分

即 $|a-1|\ge\frac{2a}{3}$，$\therefore a-1\ge\frac{2a}{3}$ 或 $a-1\le-\frac{2a}{3}$

$\therefore a\ge 3$ 或 $0<a\le\frac{3}{5}$ ……………………………………10 分