合肥一中 2023 届高三最后一卷

数学参考答案

1.解析：因为$A=[0,2],B=[-2,0]$所以$A\cap B=\{0\},\complement_R(A\cap B)=\{x\in R|\ x\neq 0\}$.故选：$C$.

2.解析：因为$z=1+\sqrt{3}i$，所以$\overline{z}=1-\sqrt{3}i$，故$\overline{z}$的虚部是$-\sqrt{3}$.故选：A.

3.解析：$\overline{x}=5$，故$\overline{y}=0.15\times5+5.75=6.5$，经计算可得被污损的数据为6.4，答案选$B$.

4.解析：曲线$C_1:y=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos2x$，

把$C_1:y=\cos2x$上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$，纵坐标不变，可得$y=\cos3x$的图象；

再把得到的曲线向左平移$\frac{\pi}{18}$个单位长度，可以得到曲线$C_2:y=-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-3x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)$的图象，故选：C.

自主选拔在线 微信号：zizzsw
自主选拔在线 微信号：zizzsw

5.解析：设直线 $y=1$ 与 y 轴交点为 M，由对称性，易知 $\triangle MFA$ 为直角三角形，且 $\angle AFM=\frac{1}{2}\angle AFB=60^{\circ}$，

$\therefore |AF|=2|FM|$，即 $1+\frac{p}{2}=2\left|1-\frac{p}{2}\right|$，去绝对值，解得 $p=\frac{2}{3}$ 或 $p=6$，$\therefore$ 抛物线的准线方程为 $y=-\frac{1}{3}$ 或

$y=-3$.故选：C.

6.解析：一方面，考虑 $\Omega=\{a,b,c,d\}$ 含有等可能的样本点，$A=\{a,b\},B=\{a,c\},C=\{a,d\}$.

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$，故 A,B,C 两两独立，但 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}$，

故此时，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 不成立.

另一方面，考虑 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 含有等可能的样本点，$A=\{1,2,3,4\},B=\{3,4,5,6\},C=\{4,6,7,8\}$.

则 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},P(ABC)=\frac{1}{8}$

$P(AC)=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$，故 A,C 不独立，也即 A,B,C 两两独立不成立.

综上，“A,B,C 两两独立”是“$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$”的既不充分也不必要条件.故选 D.

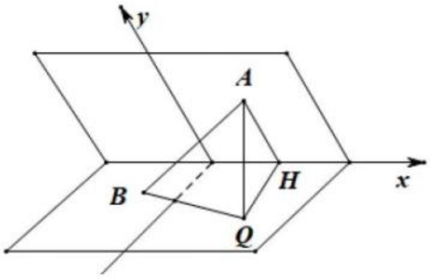
7.解析：作 AQ 垂直下半平面于，作 $AH\perp x$ 轴于 H，连接 HQ,QB.

设 $A\left(m,\frac{1}{m}\right),B\left(-m,-\frac{1}{m}\right)(m>0)$

由题可知 $\angle AHQ=60^{\circ}$，则 $AH=\frac{1}{m},QH=\frac{1}{2m},AQ=\frac{\sqrt{3}}{2m}$，

两点间距离公式可得 $QB^2=4m^2+\frac{1}{4m^2}$.

$AB^2=AQ^2+QB^2=4m^2+\frac{1}{m^2}\geq 4$，当且仅当 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$|AB|$ 取最小值 2.故选 A.



8.解析：因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$①，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 轴对称，因为 $f(x)-g(1-x)=1$ 等价于 $f(1-x)-g(x)=1$②，又 $f(3-x)+g(x)=1$③，②+③得

$f(1-x)+f(3-x)=2$④，即 $f(1+x)+f(3+x)=2$，即 $f(2+x)=2-f(x)$，所以 $f(4+x)=f(x)$，

故 $f(x)$ 的周期为4，又 $g(x)=1-f(3-x)$，所以 $g(x)$ 的周期也为4，故选项 B 正确，①代入④得

$f(1+x)+f(3-x)=2$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 中心对称，且 $f(2)=1$，故选项A正确，易得

$f(0)=1, f(4)=1$，且 $f(1)+f(3)=2$，故 $f(1)+f(2)+f(3)=f(4)=4$，故

$\sum_{i=1}^{2022} f(i)=505\times 4+f(1)+f(2)=2021+f(1)$，因为 $f(1)$ 与 $f(3)$ 值不确定，故选项C错误，因为

$f(3-x)+g(x)=1$，所以 $g(1)=0, g(3)=0, g(0)=1-f(3), g(2)=1-f(1)$，所以

$g(0)+g(2)=2-[f(1)+f(3)]=0$，故 $g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=0$，故 $\sum_{i=0}^{2023} g(i)=506\times 0=0$，所以

选项 D 正确，故选C.

9.解析：A. $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB})=2(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED})$，故 A 错误；

B.因为 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{FA})=\overrightarrow{AB}\cdot(2\overrightarrow{FA})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}=|\overrightarrow{AB}|^2$，故 B 正确；

C. $\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, (\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$，又 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FE}$，所以 $\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FE})=(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})\overrightarrow{FE}$，故 C 正确；

D. $\overrightarrow{AE}$ 在 $\overrightarrow{CB}$ 方向上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}=(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CB})\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{2}\vec{e}$，故D错误.故选BC.

10.解析：由切线长定理易得 $l=r_1+r_2$，A 正确.由勾股定理知 $(2R)^2=(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2=4r_1r_2$，解得

$R=\sqrt{r_1r_2}$，B 正

确. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R^2}{\pi\left(r_1^2+r_2^2+\left(r_1+r_2\right)l\right)}=\frac{4\pi R^2}{2\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right)}=\frac{2R^2}{r_1^{\ 2}+r_2^{\ 2}+r_1r_2}$.

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{1}{3}\pi\left(r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right)h}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{2R\pi}{3}\left(r_1^2+r_2^2+r_1r_2\right)}=\frac{2R^2}{r_1^{\ 2}+r_2^{\ 2}+r_1r_2}$.所以 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{V_1}{V_2}$, C 正

确. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2r_1r_2}{r_1^2+r_2^2+r_1r_2}=\frac{2}{\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_2}{r_1}+1}\le\frac{2}{3}$，当且仅当 $r_1=r_2$ 时等号成立，这与圆台的定义矛盾，故 D 错误.

综上，答案为ABC.

11.解析：以 BC 为 x 轴，DA 为 y 轴建系，则 $D(0,0),A\left(0,\sqrt{3}\right)$ 可以求得动点 M 的轨迹方程：

$x^2+y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}y=0$.这是一个圆心在点 $P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，半径为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的圆(不含原点 D)

A 项：$B(-1,0)$，所以 $|BM|_{\max}=|BP|+r=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{4}$.故 A 错误

B 项：$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=\left|\overrightarrow{MD}\right|^2-\frac{|\overrightarrow{CB}|^2}{4}=\left|\overrightarrow{MD}\right|^2-1\le\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{4}$.故 B 正确

C 项：易知直线 $AB:x-y+1=0$，故 $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}|AB|d_{M-AB}\le\frac{\sqrt{3}}{8}$.故 C 错误

D 项：易知 $\cos\angle MBC$ 取最小值，当且仅当 $\angle MBC$ 取最大值，也即 BM 与 $\odot P$ 相切时.此时

$\tan\frac{\angle MBC}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，故 $\cos\angle MBC=\frac{1-\tan^2\frac{\angle MBC}{2}}{1+\tan^2\frac{\angle MBC}{2}}=\frac{13}{19}$.故 D 正确.故选：BD.

12.解析：由 $\sin x>0,\cos x>0$ 得 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$x+\pi\in\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ 不在定义域内，故 $f(x+\pi)=f(x)$ 不成立，易知 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，故选项 A 错

误，又 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos^2x\cdot\log_2\cos x+2\sin^2x\cdot\log_2\sin x=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，

所以选项 B 正确，因为 $f(x)=\sin^2x\cdot\log_2\sin^2x+\cos^2x\cdot\log_2\cos^2x$，设 $t=\sin^2x$，所以函数转化为

$g(t)=t\cdot\log_2t+(1-t)\cdot\log_2(1-t),t\in(0,1),g'(t)=\log_2t-\log_2(1-t)$，所以 $g'(t)>0$ 得，$g'(t)<0$ 得

$0<t<\frac{1}{2}$，所以 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，故 $g(t)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，即 $f(x)_{\min}=-1$，

故选项C 正确，因为 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，由 $t=\sin^2x$，令 $0<\sin^2x<\frac{1}{2}$ 得

$0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $f(x)$ 的定义域为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$，解得 $2k\pi<x<\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$，因为 $t=\sin^2x$

在 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),k\in Z$，同理函数的递增区间为 $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$，所以选项 D 正确，故选 BCD.

13.解析：因为 $y'=\frac{2}{(1-x)^2}$，所以曲线 $y=\frac{1+x}{1-x}$ 在点 $(2,-3)$ 处的切线斜率为 2，所以切线方程为

$y+3=2(x-2)$，即 $y=2x-7$，即 $2x-y-7=0$.

14.解析：

法 1：$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1, \therefore \tan\alpha+\tan\beta=\tan\alpha\tan\beta-1$.

$\therefore \frac{\cos(\beta-\alpha)-\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=1-(\tan\alpha+\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta=2$.

法 2：（特殊值法）令 $\alpha=\beta=\frac{3\pi}{8}$，易得答案.

15.解析：$5.\dot{2}\dot{5}=5+0.25+0.0025+\cdots=5+\frac{0.25}{1-0.01}=\frac{520}{99}$.

16.解析：设双曲线的右焦点为 F_2，根据双曲线方程知，$c=2$.

$\because$ 直线过原点，由对称性，原点 O 平分线段原点 AB，

又原点 O 平分线段 $FF_2, \therefore$ 四边形 $AFBF_2$ 为平行四边形.

$\triangle ABF$ 和 $\triangle ABF_2$ 中，分别有中位线，$OP \parallel BF, OQ \parallel AF$，

$\because OP\perp OQ, \therefore AF\perp BF, \therefore$ 四边形 $AFBF_2$ 为矩形，$\therefore \triangle BFF_2$ 为直角三角形.

不妨设 B 在第一象限，设直线 AB 倾斜角为 2θ，则 $2\theta\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\angle OFB=\angle OBF=\theta$，

在 $Rt\triangle BFF_2$ 中可得：$\therefore 2a=|BF|-|BF_2|=4\cos\theta-4\sin\theta,\therefore e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\cos\theta-2\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$，

$\because 2\theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right),\therefore\theta\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$，易知 $f(\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}$ 在 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上为增函数，

$\therefore e=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)}\in\left[\sqrt{3}+1,+\infty\right)$

17.解析：（1）因为 $\cos B=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\cos^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{A+C}{2}=\dfrac{1+\cos B}{2}+\dfrac{\sin^2\dfrac{A+C}{2}}{\cos^2\dfrac{A+C}{2}}$

$=\dfrac{1+\cos B}{2}+\dfrac{1-\cos(A+C)}{1+\cos(A+C)}$

$=\dfrac{1+\cos B}{2}+\dfrac{1+\cos B}{1-\cos B}=\dfrac{8}{3}$.

（2）因为 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$，即 $\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ac\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$，所以 $ac=6$

再由余弦定理知，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $4^2=\left(\dfrac{6}{c}\right)^2+c^2-2\times6\times\dfrac{1}{3}$，

也即 $c^4-20c^2+36=0$，解得 $c=\sqrt{2}$ 或 $c=3\sqrt{2}$.

18.解析：（1）因为 $S_{n+2}+3S_n=4S_{n+1}-2a_n$，

所以 $S_{n+2}-S_{n+1}=3(S_{n+1}-S_n)-2a_n$，即 $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$

所以 $(a_{n+2}-2a_{n+1})-(a_{n+1}-2a_n)=(3a_{n+1}-2a_n-2a_{n+1})-(a_{n+1}-2a_n)=(a_{n+1}-2a_n)-(a_{n+1}-2a_n)=0$（为常数）

所以数列 $\{a_{n+1}-2a_n\}$ 是等差数列.

（2）由（1）知 $a_{n+1}-2a_n=a_2-2a_1=1$，即 $a_{n+1}=2a_n+1$.

也即 $a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)$，

又 $a_1+1=2$，

所以 $a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$ ..

所以 $b_n=\dfrac{n+2}{\left(n^2+n\right)\left(a_n+1\right)}=\dfrac{n+2}{n\left(n+1\right)2^n}=2\left[\dfrac{1}{n\cdot 2^n}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\cdot 2^{n+1}}\right]$.

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=2\left[\left(\dfrac{1}{1\cdot 2^1}-\dfrac{1}{2\cdot 2^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2\cdot 2^2}-\dfrac{1}{3\cdot 2^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n\cdot 2^n}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\cdot 2^{n+1}}\right)\right]$

$=2\left[\dfrac{1}{1\cdot 2^1}-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\cdot 2^{n+1}}\right]=1-\dfrac{1}{\left(n+1\right)\cdot 2^n}$

19.（1）补全四面体 $PQRS$ 如图，即证：$PQ\perp SR$

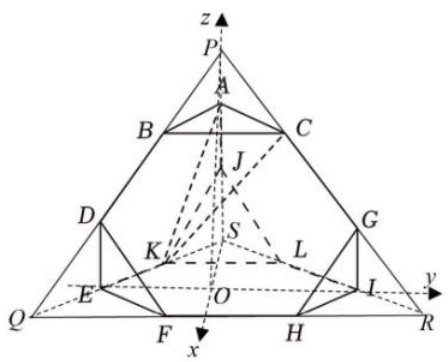
取 SR 的中点 M，正四面体中各个面均为正三角形，

故 $PM\perp SR,QM\perp SR$，

又 $PM\cap QM=M$，所以 $SR\perp$ 面 PQM.

又 $PQ\subset$ 面 PQM，所以 $PQ\perp SR$.

（2）在 $\triangle QSR$ 的中心建系如图：则



$S\left(-\sqrt{3},0,0\right),P\left(0,0,\sqrt{6}\right),R\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right),Q\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0\right)$

$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right),C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{1}{2},\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$,

$K\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, .

设面 ACK 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AK}=0\end{cases}$，解得 $\vec{n}=\left(2\sqrt{2},-2\sqrt{6},1\right)$，

又 $\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},-\sqrt{6}\right)$，所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PQ}\right\rangle\right|=\frac{\sqrt{22}}{11}$.

20.解析：（1）设事件 A 为"小周在这三个月集齐三款模型"，则 $P(A)=\left(\frac{1}{10}\right)^3\frac{A_3^3}{3^3}=\frac{1}{4500}$.

（2）$X=1,2,\cdots,12$，由题意得 $P(X=k)=\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\frac{1}{10}(k=1,2,\cdots,11)$，

$P(X=12)=\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$

$E(X)=\sum\limits_{k=1}^{11}\frac{k}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}+12\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$，错位相减求得最后结果为 $E(X)=10-9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^{11}$.

21.解析：（1）将 $M(1,1)$ 代入，可以求得 $b^2=\frac{4}{3}$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1\\ x+y-1=0\end{cases}$，得 $4x^2-6x-1=0$.设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 $|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{26}}{2}$，

又易知点 M 到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\triangle ABM$ 的面积 $S_{\triangle ABM}=\frac{\sqrt{13}}{4}$..

（2）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{4}=1\\ x+ty-1=0\end{cases}$ 得 $(t^2+3)y^2-2ty-3=0$，

则 $\begin{cases}y_1+y_2=\frac{2t}{t^2+3}\\ y_1y_2=\frac{-3}{t^2+3}\end{cases}$，

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}|AM||BM|\sin\angle AMB,S_{\triangle PQM}=\frac{1}{2}|PM||QM|\sin\angle PMQ$，

又 $\sin\angle PMQ=\sin\angle AMB$

所以$S_{\triangle PQM}=5S_{\triangle ABM}$等价于$|PM||QM|=5|AM||BM|$，也即$\dfrac{|QM|}{|BM|}=5\dfrac{|AM|}{|PM|}$

$\dfrac{|QM|}{|BM|}=5\dfrac{|AM|}{|PM|}$即$\dfrac{3}{|x_2-1|}=\dfrac{5|x_1-1|}{3}$，也即$|x_1-1||x_2-1|=\dfrac{9}{5}$，也即$|-ty_1||-ty_2|=\dfrac{9}{5}$，

也即$\dfrac{3t^2}{t^2+3}=\dfrac{9}{5}$，解得$t=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

22.解析：（1）$f'(x)=\ln x-ax$在$(0,+\infty)$上有两个变号零点，即$a=\dfrac{\ln x}{x}$有两个不等实根，

设$g(x)=\dfrac{\ln x}{x},g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，故$g(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)_{\max}=\dfrac{1}{e}$，且$g(1)=0$，又$x\to+\infty,g(x)\to0^+$，

故$0<a<\dfrac{1}{e}$，且$1<x_1<e<x_2$，

所以$f(x_1)=x_1\ln x_1-\dfrac{1}{2}ax_1^2-x_1+1$，又$a=\dfrac{\ln x_1}{x_1}$，

所以$f(x_1)=x_1\ln x_1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\ln x_1}{x_1}\cdot x_1^2-x_1+1=\dfrac{1}{2}x_1\ln x_1-x_1+1$，

设$h(x)=\dfrac{1}{2}x\ln x-x+1,x\in(1,e)$，

所以$h'(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x-1)<0$，所以$h(x)$在$(1,e)$上单调递减，

所以$h(x)\in\left(1-\dfrac{e}{2},0\right)$，所以$f(x_1)\in\left(1-\dfrac{e}{2},0\right)$.

（2）法一：$\ln x-ax=0$的两个实根x_1,x_2，所以$\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$，

所以$\ln x_2-\ln x_1=a(x_2-x_1)$，得：$a=\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，

设$t=\dfrac{x_2}{x_1}$，又$0<2x_1<x_2$，所以$t>2$，

要证：$8x_1<x_2^2$，即证：$3\ln2+\ln x_1<2\ln x_2$，

即证：$3\ln2+ax_1<2ax_2$，即证：$a\left(2x_2-x_1\right)>3\ln2$，

即证：$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}\left(2x_2-x_1\right)>3\ln2$，即证：$\ln\dfrac{x_2}{x_1}\cdot\dfrac{2x_2-x_1}{x_2-x_1}>3\ln2$，

即证：$\ln\dfrac{x_2}{x_1}\cdot\dfrac{\dfrac{2x_2}{x_1}-1}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}>3\ln2$，即证：$\dfrac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t>3\ln2$，

设 $\varphi(t)=\dfrac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t,(t>2),\varphi'(t)=\dfrac{2t+\dfrac{1}{t}-\ln t-3}{(t-1)^2},(t>2)$，

设 $F(t)=2t+\dfrac{1}{t}-\ln t-3,(t>2),F'(t)=2-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{(2t+1)(t-1)}{t^2}>0$，

所以 $F(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(2)=\dfrac{3}{2}-\ln2>0$，

所以 $\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\varphi(t)>\varphi(2)=3\ln2$，

所以 $\dfrac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t>3\ln2$，所以 $8x_1<x_2^2$ 成立.

法二：$\ln x-ax=0$ 的两个实根 x_1,x_2，所以 $\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$，所以 $\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，又 $0<2x_1<x_2$，所以 $t>2$，.

由 $\dfrac{\ln x_2}{\ln x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$ 可得：$\ln x_1=\dfrac{\ln t}{t-1},\ln x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$，.

要证：$8x_1<x_2^2$，即证：$3\ln2+\ln x_1<2\ln x_2$，

即证：$3\ln2+\dfrac{\ln t}{t-1}<\dfrac{2t\ln t}{t-1}$，即证：$\dfrac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t>3\ln2$

设 $\varphi(t)=\dfrac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t,(t>2),\varphi'(t)=\dfrac{2t+\dfrac{1}{t}-\ln t-3}{(t-1)^2},(t>2)$，

设 $F(t)=2t+\dfrac{1}{t}-\ln t-3,(t>2),F'(t)=2-\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{(2t+1)(t-1)}{t^2}>0$，

所以 $F(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(2)=\frac{3}{2}-\ln 2>0$，

所以 $\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $\varphi(t)>\varphi(2)=3\ln 2$，

所以 $\frac{2t-1}{t-1}\cdot\ln t>3\ln 2$，所以 $8x_1<x_2^2$ 成立.

法三：由（1）知：$0<a<\frac{1}{e}$，且 $1<x_1<e<x_2$，

$g(x)=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

又 $x_1<2x_1<x_2$，且 $g(x_1)=g(x_2)=a$，所以 $g(x_2)=g(x_1)<g(2x_1)$，

所以 $\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{\ln 2x_1}{2x_1}$，所以 $\ln x_1^2<\ln 2x_1$，所以 $x_1^2<2x_1$，所以 $1<x_1<2$，

又 $g(2)=\frac{\ln 2}{2}$，所以 $0<a<\frac{\ln 2}{2}$，

又 $\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，即 $g(2)=g(4)$，所以 $x_2>4$，

因为 $2x_1<x_2$，所以 $8x_1<4x_2<x_2^2$，故 $8x_1<x_2^2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜
自主选拔在线