2024 届高三考试
数学试题参考答案(文科)

1. B　因为 $A=\{x|x\geqslant -3\}$, $B=\{x|x<2\}$,所以 $A\cap B=\{x|-3\leqslant x<2\}$.

2. C　因为 $1-\mathrm{i}\cdot z=1-\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=-2\mathrm{i}$,所以 $|1-\mathrm{i}\cdot z|=2$.

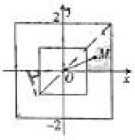
3. D　因为 $f(x)=\sin(2x+\frac{3\pi}{10})$,所以 $f(\frac{3\pi}{10})=\sin(2\times\frac{3\pi}{10}+\frac{3\pi}{10})\neq\pm1$, $f(\frac{\pi}{4})=\sin(2\times\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{10})\neq0$,A 错误,B 错误. 显然 $f(x)$ 的最小正周期为 π,C 错误. 将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍,纵坐标不变,可得函数 $y=\sin(x+\frac{3\pi}{10})$ 的图象,D 正确.

4. C　因为 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,所以 $DE/\!/AB$, $DE=\frac{1}{2}AB=1$, $\angle ADE=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$. 又 $AD=\sqrt{3}$,所以 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DE}=\sqrt{3}\times1\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

5. D　因为 $f(x)=4x^2+(a-4)x+|x|$ 是偶函数,所以 $a-4=0$,解得 $a=4$.

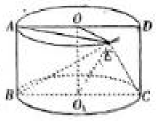
6. A　因为 $y'=-\frac{3}{(x-3)^2}$,所以所求切线的斜率 $k=-\frac{3}{(2-3)^2}=-3$,故该切线的方程为 $y=-3x+4$.

7. A　因为 $e_2=\frac{3}{4}e_1$,所以 $\sqrt{1+\frac{b^2}{8}}=\frac{3}{4}\times\sqrt{1+1}$,解得 $b=1$.



8. B　满足"直线 OM 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$"这个条件的点 M 构成的区域为图中的阴影部分,根据几何概型的定义,可知所求概率为 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$.

9. A　因为 $b\cos C-c\cos B=a$,所以 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin A$,整理得 $\sin B\cos C-\cos B\sin C=\sin B\cos C+\cos B\sin C$,所以 $\cos B\sin C=0$. 因为 $\sin C>0$,所以 $\cos B=0$. 又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{2}$,从而 $A+C=\frac{\pi}{2}$. 又 $A=2C$,所以 $C=\frac{\pi}{6}$.

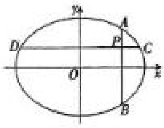


10. B　四棱锥体积 $V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot d$,其中 d 为 E 到 AD 的距离.
因为正方形 $ABCD$ 的面积为定值,所以当 E 为 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点时,四棱锥的体积最大,连接 OE, O_1E,此时其侧面积 $S=\frac{1}{2}AD\cdot OE+\frac{1}{2}AB\cdot AE+\frac{1}{2}CD\cdot DE+\frac{1}{2}BC\cdot O_1E=1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

11. C　因为 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200[(80-m)(50-m)-(20+m)(50+m)]^2}{100\times100\times130\times70}=\frac{8(15-m)^2}{91}\geqslant3.841$,所以 $(15-m)^2\geqslant43.7$,又 $5\leqslant m\leqslant15$,所以 $15-m\geqslant7$,解得 $m\leqslant8$.

故在被调查的100名女生中喜欢观看体育比赛直播的人数的最大值为58.

12. D　设 $P(m,n)$，$|PA|=t$，则 $A(m,n+t)$，$B(m,n-3t)$，$C(m+2t,n)$，$D(m-4t,n)$. 由题知 A,B 关于 x 轴对称，C,D 关于 y 轴对称，所以 $n+t+n-3t=0$，$m+2t+m-4t=0$，即 $n=t$，$m=t$，所以 $A(t,2t)$；$C(3t,t)$.



因为 A,C 在椭圆 E 上，所以 $\begin{cases}\frac{t^2}{8}+\frac{4t^2}{b^2}=1,\\ \frac{9t^2}{8}+\frac{t^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 即 $\frac{9}{8}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{8}+\frac{4}{b^2}$，解得 $b=\sqrt{3}$.

13. -4　画出可行域(图略)知，当直线 $z=2x-y$ 过点 $(-3,-2)$ 时，z 取得最小值 -4.

14. 6;17　执行程序框图，

$n=1$，$S=0$，$S=-S+2^1=2$，$n=2$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^2S+2^2=6$，$n=3$，满足 $6\leqslant P$；

$S=(-1)^3S+2^3=2$，$n=4$，满足 $2\leqslant P$；

$S=(-1)^4S+2^4=18$，$n=5$，满足 $18>P$.

所以 $6\leqslant P\leqslant 17$，$P\in\mathbf{N}^*$，所以正整数 P 的最小值和最大值分别为6和17.

15. $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$　设这个黄金三角形的另一个底角为 B，顶角为 A，因为 $\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $\cos C=\frac{BC}{2AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，则 $\cos 2C=2\cos^2C-1=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

16. $\frac{2\sqrt{30}}{5}$　取 BC 的中点 D，连接 AD，C_1D(图略)，易知 $\angle AC_1D$ 为直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成的角. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，边长为 a，正三棱柱的高为 h，则 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$AC_1=\sqrt{a^2+h^2}$，所以 $\sin 30^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{a^2+h^2}}$，即 $h^2=2a^2$. 又因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 内接于半径为2的球，所以 $(\frac{\sqrt{3}a}{3})^2+(\frac{h}{2})^2=2^2$，所以 $\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{2}=4$，解得 $a=\frac{2\sqrt{30}}{5}$，即 $AB=\frac{2\sqrt{30}}{5}$.

17. 解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

依题意得 $\begin{cases}2(a_1+4d)-(a_1+3d)=11,\\ 3(a_1+d)=9,\end{cases}$ ………………………… 3分

解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2,\end{cases}$ ………………………… 4分

所以 $a_n=2n-1$. ………………………… 5分

(2)由(1)得 $S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$， ………………………… 6分

所以 $b_n=\frac{1+a_n}{(n+1)S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， ………………………… 8分

所以 $T_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}$. ………………………………… 9 分

由 $\frac{99}{50}<\frac{2m}{m+1}<\frac{101}{51}$,解得 $99<m<101$, ………………………………… 11 分

因为 $m\in \mathbf{N}^*$,所以 $m=100$. ………………………………… 12 分

18. 解:(1)由已知可得 $a=\frac{300}{600}\times\frac{1}{10}=0.05$, ………………………………… 1 分

则 $(0.005+0.05+b+c+0.005)\times10=1$,即 $b+c=0.04$,

又因为 a,b,c 成等差数列,所以 $2b=0.05+c$, ………………………………… 3 分

解得 $b=0.03,c=0.01$. ………………………………… 4 分

(2)可知 $0.005\times10=0.05<0.5$,$(0.005+0.05)\times10=0.55>0.5$,

设中位数为 x,则 $x\in[60,70)$,由 $0.005\times10+(x-60)\times0.05=0.5$,解得 $x=69$,

即中位数为 69. ………………………………… 6 分

平均数为 $(55\times0.005+65\times0.05+75\times0.03+85\times0.01+95\times0.005)\times10=71$. …… 8 分

(3)成绩位于区间 $[80,90)$ 内的学生有 $0.01\times10\times600=60$ 人,成绩位于区间 $[90,100]$ 内的学生有 $0.005\times10\times600=30$ 人, ………………………………… 9 分

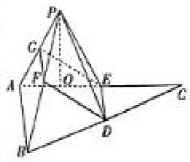
通过分层抽样抽取的 6 人中成绩位于 $[80,90)$ 的人数为 $6\times\frac{60}{90}=4$,这 4 人分别记为 a,b,c,d,成绩位于 $[90,100]$ 的人数为 $6\times\frac{30}{90}=2$,这 2 人分别记为 E,F. ………………………………… 10 分

从上述 6 人中抽取 2 人的基本事件有 $ab,ac,ad,aE,aF,bc,bd,bE,bF,cd,cE,cF,dE,dF,EF$,共 15 种, ………………………………… 11 分

其中恰有 1 人的得分在区间 $[90,100]$ 内的基本事件有 aE,aF,bE,bF,cE,cF,dE,dF,共 8 种,故所求概率 $P=\frac{8}{15}$. ………………………………… 12 分

19. (1)证明:取 PA 的中点 G,连接 FG,GE,

因为 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线,



所以 $DE/\!/AB$,且 $DE=\frac{1}{2}AB$. ………………………………… 1 分

同理可证 $FG/\!/AB$,且 $FG=\frac{1}{2}AB$. ………………………………… 2 分

所以 $DE/\!/FG$,$DE=FG$,四边形 $DEGF$ 为平行四边形,

所以 $DF/\!/EG$. ………………………………… 4 分

因为 $EG\subset$ 平面 PAE,$DF\not\subset$ 平面 PAE,所以 $DF/\!/$ 平面 PAE. ………………………………… 5 分

(2)解:取 AE 的中点 O,连接 PO,因为 $PA=PE=AE$,所以 $PO\perp AE$.

易知 $DE\perp EC$,$DE\perp PE$,所以 $DE\perp$ 平面 PAE,从而 $DE\perp PO$.

因为 $AE\cap DE=E$,所以 $PO\perp$ 平面 $ABDE$,且 $PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………………… 7 分

因为 $AC=\sqrt{2}AB=2$，所以 $AB=\sqrt{2}$，······ 8 分

又因为 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AE=1$，······ 9 分

因为 $AC\perp AB$，所以四边形 $ABDE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2})\times 1=\frac{3\sqrt{2}}{4}$. ······ 11 分

所以四棱锥 $P-ABDE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{8}$. ······ 12 分

20. 解：(1)由题意知 $F(0,\frac{p}{2})$，直线 l 的方程为 $y=x+\frac{p}{2}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，······ 1 分

联立方程组 $\begin{cases} y=x+\frac{p}{2}, \\ x^2=2py, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-3py+\frac{p^2}{4}=0$，则 $y_1+y_2=3p$. ······ 3 分

因为 $|AB|=y_1+y_2+p=4p$，所以 $4p=16$，解得 $p=4$. ······ 5 分

(2)由(1)知 $l: y=x+2$，$y_1+y_2=12$，设线段 AB 的中点为 D，则 $D(4,6)$，线段 AB 的中垂线方程为 $y=-x+10$. ······ 7 分

设圆心为 $P(x_0,y_0)$，易点知 $P(x_0,y_0)$ 在直线 $y=-x+10$ 上，

即 $\begin{cases} y_0=-x_0+10, \\ (y_0+2)^2=(x_0-4)^2+(y_0-6)^2+8^2, \end{cases}$ ······ 9 分

消去 y_0 得 $x_0^2+8x_0-48=0$，解得 $\begin{cases} x_0=4, \\ y_0=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_0=-12, \\ y_0=22, \end{cases}$ ······ 11 分

所以所求圆的方程为 $(x-4)^2+(y-6)^2=64$ 或 $(x+12)^2+(y-22)^2=576$. ······ 12 分

注：少写一个圆的方程扣 2 分.

21. (1)解：当 $a=e$ 时，因为 $f(x)=e^x+(1-e)x-1$，所以 $f'(x)=e^x+1-e$，······ 1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(e-1)$，······ 2 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(e-1))$ 上单调递减，在 $(\ln(e-1),+\infty)$ 上单调递增. ······ 4 分

(2)证明：(法一)易知当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x<x-1$，$\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$，所以 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$. ······ 6 分

由题设知 $a>1$，$f'(x)=a^x\ln a+1-a$. ······ 7 分

令 $f'(x)=0$，得 $x_0=\dfrac{\ln\frac{a-1}{\ln a}}{\ln a}$，······ 8 分

由上可知 $1<\frac{a-1}{\ln a}<a$；$0<\ln\frac{a-1}{\ln a}<\ln a$，故 $0<x_0<1$. ······ 10 分

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ······ 11 分

又 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$. ······ 12 分

(法二)因为 $f'(x)=a^x\ln a+1-a$，且 $a>1$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增. ······ 5 分

又 $f'(0)=\ln a+1-a$，设 $g(a)=\ln a+1-a$，则 $g'(a)=\frac{1}{a}-1<0$，可知 $g(a)$ 在 $(1,+\infty)$ 上

单调递减，所以 $g(a)<g(1)=0$，即 $f'(0)<0$. ………… 7 分

又 $f'(1)=a\ln a+1-a$，设 $h(a)=a\ln a+1-a$，则 $h'(a)=\ln a>0$，可知 $h(a)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $h(a)>h(1)=0$，即 $f'(1)>0$. ………… 9 分

所以存在唯一的 $x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，在$(x_0,1)$上单调递增. ………… 11 分

因为 $f(0)=f(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$. ………… 12 分

22. 解：(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+3\cos\alpha,\\ y=-2+3\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)，其普通方程为$(x-1)^2+(y+2)^2=9$，即 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$， ………… 2 分

则 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$. ………… 3 分

直线 C_2 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，

所以直线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ………… 5 分

(2)设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

将 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$代入 $\rho^2-2\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta-4=0$， ………… 7 分

得 $\rho^2+(2\sqrt{3}-1)\rho-4=0$， ………… 8 分

所以 $\rho_1\rho_2=-4$， ………… 9 分

所以$|OM|\cdot|ON|=|\rho_1\rho_2|=4$. ………… 10 分

23. 解：(1)化简得$|x+2|-2|x-1|>-3$. ………… 1 分

当 $x\geqslant1$ 时，解得 $x<7$，所以 $1\leqslant x<7$； ………… 2 分

当 $x\leqslant-2$ 时，解得 $x>1$，此时无解； ………… 3 分

当$-2<x<1$ 时，解得 $x>-1$，所以$-1<x<1$. ………… 4 分

综上所述，原不等式的解集为$(-1,7)$. ………… 5 分

(2)因为 $f(x)=\begin{cases}-3,x\leqslant-2,\\ 2x+1,-2<x<1,\\ 3,x\geqslant1,\end{cases}$ ………… 7 分

所以 $f(x)_{max}=3$. ………… 8 分

由题意知$|1-m|\leqslant3$，解得$-2\leqslant m\leqslant4$，

所以 m 的取值范围是$[-2,4]$. ………… 10 分