2022年全国统一高考数学试卷甲卷

（理科）

注意事项：

1．答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上，并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目，在规定的位置贴好条形码。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

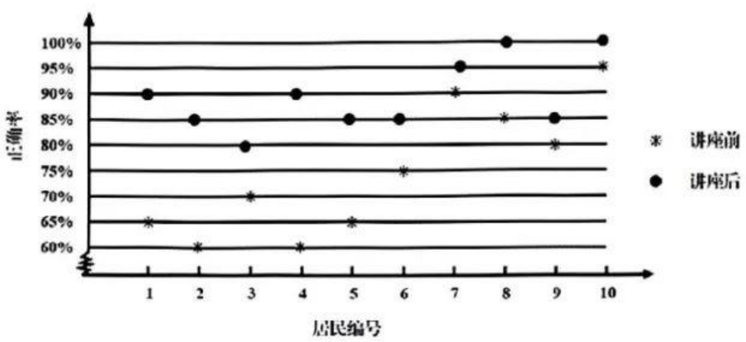
1．若 $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，则 $\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=$

A．$-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$　　B．$-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$　　C．$-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$　　D．$-\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】由 $\dfrac{z}{z\bar{z}-1}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{4-1}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}$，故选：C.

2．某社区通过公益讲座以及普及社区居民的垃圾分类知识. 为了解讲座效果，随机抽取10位社区居民，让他们在讲座前和讲座后各回答一份垃圾分类知识问卷，这10位社区居民在讲座前和讲座后问卷答题的正确率如下图：



则

A．讲座前问卷答题的正确率的中位数小于70%

B．讲座后问卷答题的正确率的平均数大于85%

C．讲座前问卷答题的正确率的标准差小于讲座后正确率的标准差

D．讲座后问卷答题的正确率的极差大于讲座前正确率的极差

【答案】B

【解析】由图表信息可知讲座后问卷答题的正确率的平均数为 89.5%>85%，故选：B.

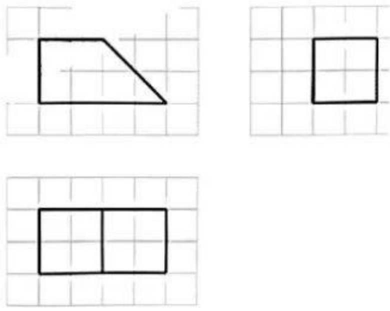
3．设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x|x^2-4x+3=0\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$

A．$\{1,3\}$　　B．$\{0,3\}$　　C．$\{-2,1\}$　　D．$\{-2,0\}$

【答案】D

【解析】由 $B=\{x|x^2-4x+3=0\}=\{1,3\}$，$A\cup B=\{-1,1,2,3\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,0\}$，故选：D.

4．如图，网格纸上绘制的是一个多面体的三视图，网格小正方系的边长为 1，则该多面体的体积为



A．8

B．12

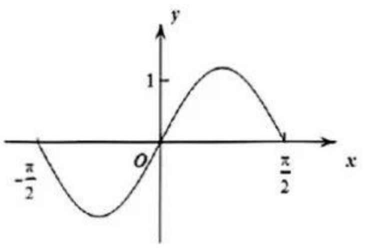
C．16

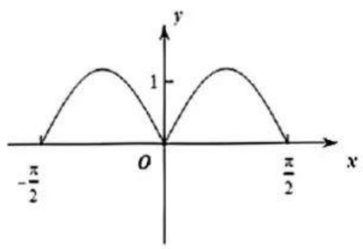
D．20

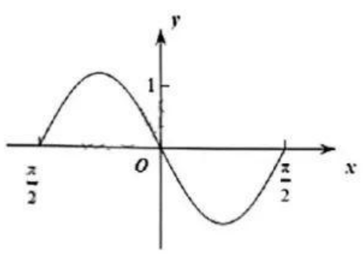
【答案】B

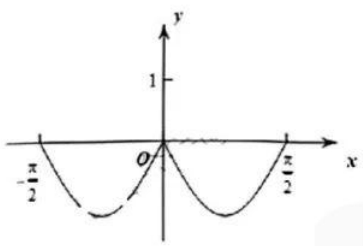
【解析】该多面体的体积一个长方体体积减去一个三棱柱的体积得到，即 $2\times4\times2-\frac{1}{2}\times2\times2\times2=12$，故选：B.

5．函数 $y=(3^x-3^{-x})\cos x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的图像大致为

A.


B.


C.


D.


【答案】A

【解析】设 $f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，$f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除 BD，令 $x=1$，则 $f(1)=(3-3^{-1})\cos 1>0$，排除 C，故选 A.

6. 当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x^2}$，由条件，得 $\begin{cases}f(1)=b=-2\\ f'(1)=a-b=0\end{cases}$，所以 $a=b=-2$，即

$f'(x)=-\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}$，

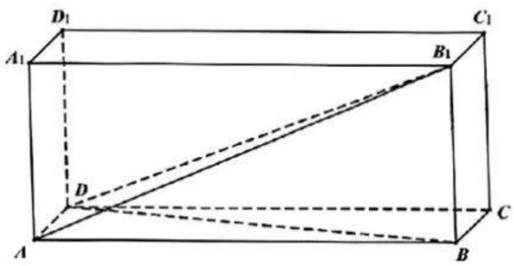
所以 $f'(2)=-\dfrac{2}{2}+\dfrac{2}{2^2}=-\dfrac{1}{2}$.

故选 B.

7. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 B_1D 与平面 $ABCD$ 和平面 AA_1B_1B 所成的角均为 30°，则

A. $AB=2AD$　　B. AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $30°$

C. $AC=CB_1$　　D. B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $45°$



【答案】D

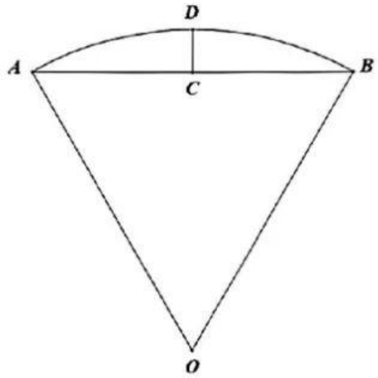
【解析】B_1D 与平面 $ABCD$ 即 $\angle B_1DB$，B_1D 与平面 AA_1B_1B 即 $\angle DB_1A$，

则 $\angle B_1DB=\angle DB_1A=30^\circ$，设 $B_1D=2$，则 $AD=BB_1=1$，由长方体对角线长公式 $l^2=a^2+b^2+c^2$，得 $AB=\sqrt{2}$，从而 $AB_1=\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{2}AD$，AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角 $\angle B_1AB$ 的正弦值为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$AC=\sqrt{3}>\sqrt{2}=CB_1$，$B_1D$ 与平面 BB_1C_1C 所成的角 $\angle DB_1C$

的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图，AB是以为O圆心，OA为半径的圆弧，C是AB的中点，D在AB上，$CD\perp AB$“会圆术”给出AB的弧长的近似值s的计算公式：$s=AB+\dfrac{CD^2}{OA}$. 当$OA=2$，$\angle AOB=60^\circ$时，$s=$

A. $\dfrac{11-3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{11-4\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{9-3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{9-4\sqrt{3}}{2}$



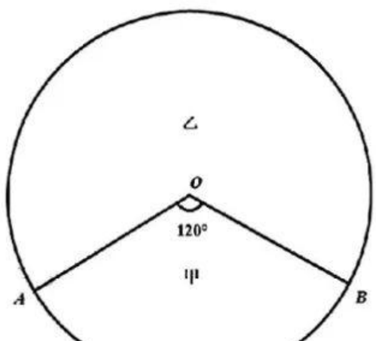
【答案】B

【解析】由条件得，ΔOAB为等边三角形，有$OC=\sqrt{3}$，$CD=2-\sqrt{3}$，所以

$$s=2+\frac{(2-\sqrt{3})^2}{2}=2+\frac{7-4\sqrt{3}}{2}=\frac{11-4\sqrt{3}}{2}.$$

9. 甲、乙两个圆锥的母线长相等，侧面展开图的圆心角之和为2π，侧面积分别为$S_{甲}$和$S_{乙}$，体积分别为$V_{甲}$和$V_{乙}$，若$\dfrac{S_{甲}}{S_{乙}}=2$，则$\dfrac{V_{甲}}{V_{乙}}=$

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\dfrac{5\sqrt{10}}{4}$



【答案】C

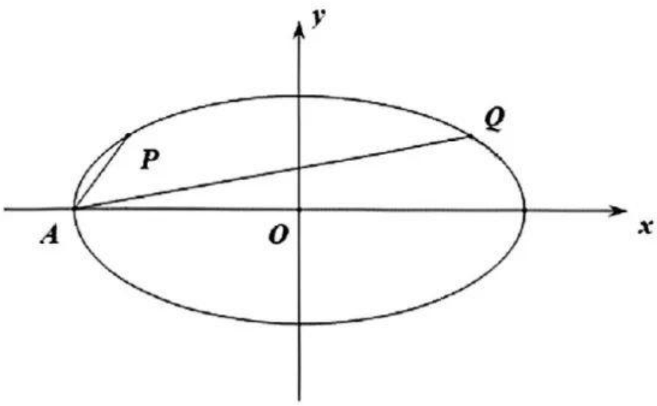
【解析】如图，甲、乙两个圆锥的侧面展开图刚好拼成一个圆，设圆的半径

线）为 3，甲、乙两个圆锥的底面半径分别为r_1，r_2，高分别为h_1，h_2，则$2\pi r_1=4\pi$，$2\pi r_2=2\pi$，则$r_1=2$，$r_2=1$，由勾股定理，得$h_1=\sqrt{5}$，$h_2=2\sqrt{2}$，所以

$$\frac{V_甲}{V_乙}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2h_2}=\frac{r_1^2h_1}{r_2^2h_2}=\frac{2^2\times\sqrt{5}}{1^2\times2\sqrt{2}}=\sqrt{10}.$$

10．椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A$，点$P$，$Q$均在$C$上，且关于$y$轴对称．若直线$AP$，$AQ$的斜率之积为$\frac{1}{4}$，则的离心率为

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{3}$



【答案】A

【解析】椭圆C的右顶点为B，由于点P，Q均在C上，且关于y轴对称，所以直线BP，AQ也关于y轴对称，即$k_{AP}\cdot k_{BP}=-k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\frac{1}{4}=e^2-1$，$e^2=\frac{3}{4}$，$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

11．已知$f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$区间在$(0,\pi)$上恰有三个极值点，两个零点，则$\omega$的取值范围是

A．$\left[\frac{5}{3},\frac{13}{6}\right)$　　B．$\left[\frac{5}{3},\frac{19}{6}\right)$　　C．$\left(\frac{13}{6},\frac{8}{3}\right]$　　D．$\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$

【答案】C

【解析】设$\omega x+\frac{\pi}{3}=t$，则$t\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\omega+\frac{\pi}{3}\right)$，有两个零点可得$2\pi<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant3\pi$，即$\frac{5}{3}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$。又因为有三个极值点，$(\sin t)'=\cos t$，所以$\frac{5\pi}{2}<\pi\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{2}$，所以$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{19}{6}$，

综上得$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{8}{3}$

即选 C．

12．已知$a=\frac{31}{32}$，$b=\cos\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}$，则

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$　　C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

【答案】A

【解析】构造函数 $h(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\cos x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $g(x)=h'(x)=-x+\sin x$，$g'(x)=-1+\cos x\leqslant 0$

所以 $g(x)\leqslant g(0)=0$，因此，$h(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上递减，所以 $h(\frac{1}{4})=a-b<h(0)=0$，即 $a<b$．

另一方面，$\frac{c}{b}=\frac{4\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}=\frac{\tan\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$，显然 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x$，

所以 $\frac{c}{b}=\frac{4\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}=\frac{\tan\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}>1$，即 $b<c$．

因此 $c>b>a$．

即选 A.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 设向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$，且 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=3$，则 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$______.

【答案】11

【解析】代入展开即可.

14．若双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$ 的渐近线与圆 $x^2+y^2-4y+3=0$ 相切，则 $m=$______.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】由圆心为 $(0,2)$，半径为 1 的圆与直线 $x=my$ 相切可得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

15．从正方体的 8 个顶点中任选 4 个，则这 4 个点在同一平面上的概率为______.

【答案】$\frac{6}{35}$

【解析】$\frac{12}{C_8^4}=\frac{6}{35}$.

16．已知 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120°$，$AD=2$，$CD=2BD$．当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时，$BD=$__________.

【答案】$\sqrt{3}-1$

【解析】令 $BD=t$，以 D 为坐标原点，DC 为 x 轴建立直角坐标系，则

$C(2t,0)$，$A(1,\sqrt{3})$，$B(-t,0)$，

$$\frac{AC^2}{AB^2}=\frac{(2t-1)^2+3}{(t+1)^2+3}=4-\frac{12}{t+1+\frac{3}{t+1}}\geq 4-2\sqrt{3}$$

当且仅当 $t+1=\sqrt{3}$，即 $BD=\sqrt{3}-1$ 时取等号.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$.

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）若 a_4,a_7,a_9 成等比数列，求 S_n 的最小值.

【答案】（1）略；（2）-78

【解析】（1）由于 $\frac{2S_n}{n}+n=2a_n+1$，变形为 $2S_n=2na_n+n-n^2$，记为①式，

又 $2S_{n-1}=2(n-1)a_{n-1}+n-1-(n-1)^2$，记为②式，

①-②可得 $(2n-2)a_n-(2n-2)a_{n-1}=2n-2, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$

即 $a_n-a_{n-1}=1, n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）由题意可知 $a_7^2=a_4a_9$，即 $(a_1+6)^2=(a_1+3)(a_1+8)$，解得 $a_1=-12$，所以

$a_n=-12+(n-1)\times 1=n-13$，其中 $a_1<a_2<\ldots<a_{12}<0$，$a_{13}=0$

则 S_n 的最小值为 $S_{12}=S_{13}=-78$.

【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【解析】（1）$\because PD\perp$ 底面 $ABCD$，

$\therefore PD \perp BD$，

取 AB 中点 E，连接 DE，可知 $DE=\frac{1}{2}AB=1$，

$\because CD//AB$，

$\therefore CD\underline{\underline{//}}BE$，

$\therefore$四边形 $BCDE$ 为平行四边形，

$\therefore DE=CB=1$，

$\because DE=\frac{1}{2}AB$，

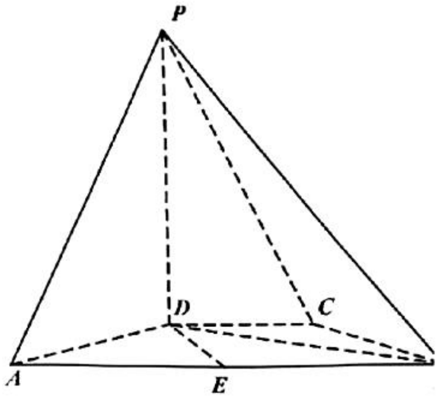
$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形，AB 为斜边，

$\therefore BD\perp AD$，

$\because PD\cap AD=D$，

$\therefore BD\perp$平面 PAD，

$\therefore BD\perp PA$.



(2) 由 (1) 知，PD，AD，BD 两两垂直，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3}$，

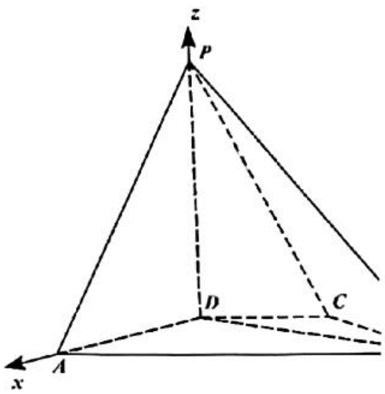
建立空间直角坐标系如图所示，则

$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{PD}=(0,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,\sqrt{3},0)$，

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x-\sqrt{3}z=0\\ -x+\sqrt{3}y=0\end{cases}$



不妨设 $y=z=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,1)$，

设 PD 与平面 PAB 的所成角为 θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PD},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PD}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{PD}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}，$$

$\therefore PD$ 与平面 PAB 的所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

19. (12 分)

甲、乙两个学校进行体育比赛，比赛共设三个项目，每个项目胜方得 10 分，负方得 0 分，没有平局. 三个项目比赛结束后，总得分高的学校获得冠军. 已知甲学校在三个项目中获胜

胜的概率分别为 0.5, 0.4, 0.8，各项目的比赛结果相互独立.

（1）求甲学校获得冠军的概率；

（2）用 X 表示乙学校的总得分，求 X 的分布列与期望.

【答案】（1）0.6；（2）13.

【解析】（1）记甲学校获得冠军为事件 A，

则 $P(A)=0.5\times0.4\times(1-0.8)+0.5\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times0.8+0.5\times0.4\times0.8=0.6$

甲学校获得冠军的概率是 0.6.

（2）X 的可能取值为 0, 10, 20, 30

则 $P(X=0)=0.5\times0.4\times0.8=0.16$

$P(X=10)=0.5\times0.4\times(1-0.8)+0.5\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times0.8=0.44$

$P(X=20)=0.5\times(1-0.4)\times(1-0.8)+(1-0.5)\times(1-0.4)\times0.8+(1-0.5)\times0.4\times(1-0.8)=0.34$

$P(X=30)=(1-0.5)\times(1-0.4)\times(1-0.8)=0.06$

X 的期望值为 $E(X)=0\times0.16+10\times0.44+20\times0.34+30\times0.06=13$.

20.（12 分）

设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M,N 两点，当直线 $MD\perp x$ 轴时，$|MF|=3$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 MD、ND 与 C 的另一个交点分别为 A,B，记直线 MN、AB 的倾斜角分别为 α,β，当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.

【答案】（1）C 的方程为 $y^2=4x$；（2）AB 的直线方程为 $x+\sqrt{2}y-4=0$.

【解析】（1）由题可知，当 $x=p$ 时，$y^2=2p^2$，则 $y_M=\sqrt{2}p$

则可知 $|MD|=\sqrt{2}p$，$|FD|=\dfrac{p}{2}$

则在 $Rt\Delta MFD$ 中，$|FD|^2+|DM|^2=|FM|^2$

得 $(\dfrac{p}{2})^2+(\sqrt{2}p)^2=9$，解得 $p=2$

则 C 的方程 $C:y^2=4x$

（2）要使 $\alpha-\beta$ 最大，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 最大，且易知当直线 MN 的斜率为负时，$\alpha-\beta$ 为正才能达到最大。

又 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),A(x_3,y_3),B(x_4,y_4)$，由（1）可知 $F(1,0),D(2,0)$

则 $\tan\beta=k_{MN}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^2}{4}-\dfrac{y_2^2}{4}}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$

又 N,D,B 三点共线，则 $k_{ND}=k_{BD}$，则 $\dfrac{y_2-0}{x_2-2}=\dfrac{y_4-0}{x_4-2}$，则 $\dfrac{y_2-0}{\dfrac{y_2^2}{4}-2}=\dfrac{y_4-0}{\dfrac{y_2^2}{4}-2}$

得 $y_2y_4=-8$，即 $y_4=\dfrac{-8}{y_2}$

同理由 M,D,A 三点共线可得 $y_3=\dfrac{-8}{y_1}$

则 $\tan\alpha=\dfrac{4}{y_3+y_4}=\dfrac{y_1y_2}{-2(y_1+y_2)}$

由题可知，直线 MN 斜率不为 0，不妨设 $l_{MN}:x=my+1(m<0)$

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=my+1\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-4=0\Rightarrow\begin{cases}y_1+y_2=4m\\y_1y_2=-4\end{cases}$

则 $\tan\beta=\dfrac{4}{4m}=\dfrac{1}{m}$，$\tan\alpha=\dfrac{-4}{-2\times4m}=\dfrac{1}{2m}$

则 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\dfrac{1}{2m}-\dfrac{1}{m}}{1+\dfrac{1}{2m}\bullet\dfrac{1}{m}}=\dfrac{-1}{2m+\dfrac{1}{m}}$

则可知当 $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\tan(\alpha-\beta)$ 最大，即 $\alpha-\beta$ 最大，此时

AB 的直线方程为 $y-y_3=\dfrac{4}{y_3+y_4}(x-x_3)$，即 $4x-(y_3+y_4)y+y_3y_4=0$

又 $y_3+y_4=\dfrac{-8}{y_1}+\dfrac{-8}{y_2}=\dfrac{-8(y_1+y_2)}{y_1y_2}=8m=-4\sqrt{2}$

$y_3y_4=\dfrac{-8}{y_1}\bullet\dfrac{-8}{y_2}=-16$

则 AB 的直线方程为 $4x+4\sqrt{2}y-16=0$，即 $x+\sqrt{2}y-4=0$

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$.

（1）若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围；

（2）证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，则 $x_1x_2<1$.

【答案】（1）$(-\infty,e+1]$；（2）见证明；

【解析】（1）$f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x}-\frac{1}{x}+1=\frac{(e^x+x)(x-1)}{x^2}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，所以 $0<x<1$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

$x>1$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=e+1-a$，要使得 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立

即满足：$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=e+1-a\geqslant 0\Rightarrow e+1\geqslant a$.

（2）由（1）知要使得有 $f(x)$ 两个零点，则 $\therefore f(x)_{\min}=f(1)=e+1-a<0\Rightarrow e+1<a$

假设 $0<x_1<1<x_2$.要证明 $x_1x_2<1$ 即证明 $1<x_2<\frac{1}{x_1}$，又由于 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单增，即证明

$f(x_2)<f(\frac{1}{x_1})\Leftrightarrow f(x_1)<f(\frac{1}{x_1})$. 下面构造函数 $F(x)=f(x)-f(\frac{1}{x})(0<x<1)$

$F'(x)=f'(x)+f'(\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1)}{x^2}$

由于 $e^x>ex\Rightarrow e^x+x>ex+x=(e+1)x$，又函数 $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,1)$ 单减，

$\therefore xe^{\frac{1}{x}}>e\Rightarrow -xe^{\frac{1}{x}}-1<-e-1$ $\therefore e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1<e+1-e-1=0$

$\therefore 0<x<1$ 时 $F'(x)>0\Rightarrow F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，而 $F(1)=f(1)-f(1)=0$

$\therefore F(x)>0\Rightarrow f(x)<f(\frac{1}{x})$ 得证.

22.【选修 4-4：坐标系与参数方程】（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{2+t}{6}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$，（$t$ 是参数），曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{2+s}{6}\\ y=-\sqrt{s}\end{cases}$，（$s$ 是参数）.

（1）写出 C_1 的普通方程；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴建立极坐标系，曲线C_3的极坐标方程为$2\cos\theta-\sin\theta=0$，求C_3与C_1交点的直角坐标，及C_3与C_2交点的直角坐标.

【答案】（1）$y^2=6x-2(y\geqslant 0)$；

（2）C_3与C_1交点为$(\frac{1}{2},1)$和$(1,2)$；C_3与C_2交点为$(-1,-2)$和$(-\frac{1}{2},-1)$。

【解析】（1）由C_1：$\begin{cases}x=\dfrac{2+t}{6}\\ y=\sqrt{t}\end{cases}$ 消去参数t得$y^2=6x-2(y\geqslant 0)$.

(2) C_3: $2\cos\theta-\sin\theta=0$, 两边乘ρ， $\Rightarrow$ $2\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$.

$\therefore C_3$: $y=2x$.

联立$\begin{cases}y^2=6x-2(y\geq 0)\\ y=2x\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

C_2消去参数 s 得$y^2=-6x-2\,(y\leqslant 0)$

联立$\begin{cases}y^2=-6x-2(y\leq 0)\\ y=2x\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\ y=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$

综上所述，C_3与C_1交点为（$\frac{1}{2}$，1）和（1，2）；C_3与C_2交点为（-1，-2）和（$-\frac{1}{2}$, -1）。

23. [选修 4-4：不等式选讲]（10 分）

已知正实数 $a.b.c$ 满足 $a^2+b^2+4c^2=3$

求证：① $a+b+2c\leq 3.$

②若 $b=2c.$ 则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3.$

解析：

①由柯西不等式知：

$(a^2+b^2+4c^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(a+b+2c)^2$

即$3\times 3\geq(a+b+2c)^2$且 $a.b.c$ 是正实数

故$a+b+2c\leq 3$（当且仅当 $a=b=2c$时取等.即$a=b=1.c=\dfrac{1}{2}$

②由①知$a+b+2c\leq 3$且 $b=2c.$

故$0<a+4c\leq 3.$ $\dfrac{1}{a+4c}\geq\dfrac{1}{3}$

由权方和不等式知

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1^2}{a}+\dfrac{2^2}{4c}\geq\dfrac{9}{a+4c}\geq 3.$ 故 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\geq 3.$