绝密★启用前

天一大联考

2021—2022学年高三年级上学期期中考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x-2<1\}$，$B=\{x|2x^2-5x-7<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left(3,\frac{7}{2}\right)$　B. $\left(-1,\frac{7}{2}\right)$　C. $(-1,3)$　D. $[-1,3]$

2. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，则下列命题中，正确的是

A. 若 $a^4>b^4$，则 $a>b$　B. 若 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，则 $a>b$

C. 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$　D. 若 $\frac{a}{c^2}<\frac{b}{c^2}$，则 $a<b$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1+a_2=2$，$a_4+a_5=16$，则 $\{a_n\}$ 的公比为

A. -2　B. 1　C. 2　D. $2\sqrt{2}$

4. 下列区间一定包含函数 $f(x)=\sin 2x+\sin x-\frac{x}{2}$ 的零点的是

A. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$　B. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$　C. $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$　D. $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$

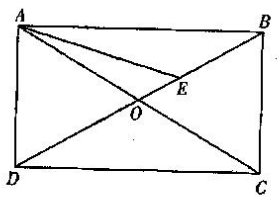
5. 已知命题 $p:\forall x\in\mathbf{R},4^x>2^x$，命题 $q:\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $\ln x_0=-1$，则下列命题是真命题的为

A. $p\wedge q$　B. $(\neg p)\wedge q$　C. $p\wedge(\neg q)$　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

6. 已知函数 $f(x)$ 是奇函数且其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x-1$，设函数 $g(x)=f(x)-x^2$，则 $g(x)$ 的图象在点 $(-1,g(-1))$ 处的切线方程为

A. $y=4x+2$　B. $y=-4x-6$　C. $y=0$　D. $y=-2$

7. 如图所示，矩形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，点 E 在线段 OB 上且 $OE=\frac{1}{3}OB$，若 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda-\mu=$

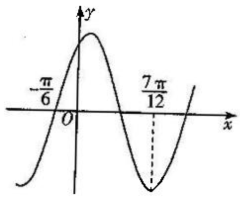


A. $\frac{1}{3}$　B. $-\frac{1}{3}$　C. 1　D. $\frac{2}{3}$

8. 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n,已知数列$\{b_n\}$是等差数列,且$b_n=\dfrac{a_n+n^2}{a_n}$,$a_3=3$,$b_4+b_5=11$,则$S_n+T_n=$

A. n^2-2n　　B. $2n^2-n$　　C. $2n^2+n$　　D. n^2+2n

9. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象大致如图所示,则不等式$\left[f(x)-f\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]\left[f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]\leqslant 0$的解集为



A. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{6},k\pi-\dfrac{\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$　　B. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{\pi}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

C. $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{4},k\pi+\dfrac{\pi}{12}\right],k\in\mathbf{Z}$　　D. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{12},k\pi+\dfrac{3\pi}{4}\right],k\in\mathbf{Z}$

10. 已知函数$f(x)=x^2+bx(b\in\mathbf{R})$,则“$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增”是“$f(f(x))$在$(0,+\infty)$上单调递增”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

11. 已知定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$满足$f(x+2)=-f(x)$,且当$x\in(0,1]$时,$f(x)=-\ln x$,则

A. $f\left(\log_4\dfrac{1}{3}\right)>f(3^4)>f(\log_3 4)$　　B. $f(3^4)>f\left(\log_4\dfrac{1}{3}\right)>f(\log_3 4)$

C. $f\left(\log_4\dfrac{1}{3}\right)>f(\log_3 4)>f(3^4)$　　D. $f(3^4)>f(\log_3 4)>f\left(\log_4\dfrac{1}{3}\right)$

12. 已知正实数x,y,z满足$x^2-xy+4y^2-z=0$,则当$\dfrac{xy}{z}$与$6x+12y-5xy-z$同时取得最大值时,$z=$

A. 6　　B. $\dfrac{27}{8}$　　C. 3　　D. $\dfrac{9}{8}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60°$,$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=6$,则$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$________.

14. 若x,y满足约束条件$\begin{cases}x-2y-4\leqslant 0,\\x-y-2\geqslant 0,\\y\leqslant 0,\end{cases}$则$z=3x-2y$的最小值为________.

15. 已知$\alpha\in(\pi,2\pi)$,$\cos\alpha-3\sin\alpha=1$,则$\cos\dfrac{\alpha}{2}=$________.

16. 某项测试有10道必答题,甲和乙参加该测试,用数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$记录他们的成绩. 若第k题甲答对,则$a_k=k$,若第k题甲答错,则$a_k=-k$;若第k题乙答对,则$b_k=2^{k-1}$,若第k题乙答错,则$b_k=-2^{k-1}$. 已知$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=767$,$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{10}b_{10}=9\ 217$,则$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知函数$f(x)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\cos x-\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）设函数$g(x)=2f(x)+1$，求$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域.

18.（12 分）

设$\{a_n\}$是公比为负数的等比数列，$3a_1$为a_2,a_3的等差中项，$a_5=-243$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

19.（12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$a\cos C-c\cos(B+C)=-\frac{b}{3\cos(A+B)}$.

（Ⅰ）求$\tan C$；

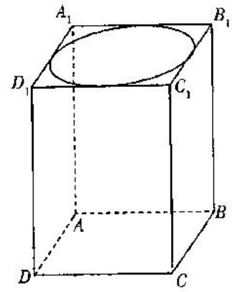
（Ⅱ）若$c=3$，$\sin A\sin B=\frac{16}{27}$，求$\triangle ABC$的面积.

20.（12分）

如图所示是一个长方体容器，长方体的上、下底面为正方形，容器顶部是一个圆形的盖子，圆与上底面四条边都相切，该容器除了盖子以外的部分均用铁皮制作，共使用铁皮的面积为16 dm^2. 假设圆形盖子的半径为 r dm，该容器的容积为 V dm^3，铁皮厚度忽略不计.

（Ⅰ）求 V 关于 r 的函数关系式；

（Ⅱ）该容器的高 AA_1 为多少分米时，V 取最大值？



21.（12分）

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的各项均为正数，且$\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{b_n}{a_n}+\dfrac{a_n}{b_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）若 $b_{n+1}=a_n^2+b_n^2$，且 $a_1=b_1=2$，求数列$\{a_nb_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若 $b_{n+1}=a_n+b_n-1$，且$\{a_n\}$是等差数列，求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=x\ln x+2x-1$.

（Ⅰ）若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线在 y 轴上的截距为 -2，求 x_0；

（Ⅱ）当 $x>1$ 时，关于 x 的不等式 $a(x-1)<f(x)$ 恒成立，求满足条件的实数 a 的最大整数值.

天一大联考
2021—2022 学年高三年级上学期期中考试

理科数学 · 答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. **答案** C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为 $A=\{x\,|\,x-2<1\}=\{x\,|\,x<3\}$，$B=\{x\,|\,2x^2-5x-7<0\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\dfrac{7}{2}\right\}$，所以 $A\cap B=\{x\,|\,-1<x<3\}$.

2. **答案** D

命题意图 本题考查不等式的性质.

解析 对于 A，若 $a=-2$，$b=1$，则 $a<b$，所以 A 项错误；对于 B，若 $c<0$，则不满足 $a>b$，所以 B 项错误；对于 C，若 $a=-1$，$b=-2$，$c=-3$，$d=-4$，则满足 $a>b$，$c>d$，而此时 $ac=3<bd=8$，所以 C 项错误；对于 D，因为 $\dfrac{a}{c^2}<\dfrac{b}{c^2}$，$c^2>0$，所以 $a<b$，所以 D 项正确.

3. **答案** C

命题意图 本题考查等比数列的概念.

解析 设公比为 q，则 $a_4+a_5=q^3(a_1+a_2)$，所以 $q^3=8$，故 $q=2$.

4. **答案** C

命题意图 本题考查零点存在性定理的应用.

解析 因为 $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\pi}{8}>0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\pi+\sin\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{\pi}{4}>0$，$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{3\pi}{2}+\sin\dfrac{3\pi}{4}-\dfrac{3\pi}{8}=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{3\pi}{8}<0$，$f(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}<0$，所以区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 一定包含 $f(x)$ 的零点.

5. **答案** B

命题意图 本题考查指数函数与对数函数的性质，以及逻辑联结词.

解析 当 $x=-1$ 时，$4^x=\dfrac{1}{4}<2^x=\dfrac{1}{2}$，所以命题 p 为假命题，则 $\neg p$ 为真命题. 当 $x_0=e^{-1}$ 时，$\ln x_0=-1$，所以命题 q 为真命题，则 $\neg q$ 为假命题，所以 $p\wedge q$ 为假命题，$(\neg p)\wedge q$ 为真命题，$p\wedge(\neg q)$ 为假命题，$(\neg p)\wedge(\neg q)$ 为假命题，故选 B.

6. **答案** A

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由已知得 $f'(1)=2$，$f(1)=1$，因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(-1)=2$，$f(-1)=-1$. 又因为 $g'(x)=f'(x)-2x$，所以 $g'(-1)=f'(-1)+2=4$，$g(-1)=f(-1)-1=-2$，所以 $g(x)$ 的图象在点 $(-1,g(-1))$ 处的切线方程为 $y=4(x+1)-2=4x+2$.

7. **答案** A

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 因为四边形 $ABCD$ 为矩形，$OE=\frac{1}{3}OB$，所以 $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$，所以 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 因为 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$，所以 $\lambda-\mu=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

8. **答案** D

命题意图 本题考查数列的通项公式与求和.

解析 由 $a_3=3$，得 $b_3=\frac{a_3+3^2}{a_3}=\frac{3+3^2}{3}=4$，设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则由 $\begin{cases}b_3=4,\\b_5+b_6=11,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b_1+2d=4,\\2b_1+7d=11,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_1=2,\\d=1,\end{cases}$ 所以 $b_n=2+(n-1)\times1=n+1$. 则 $b_n=\frac{a_n+n^2}{a_n}=n+1$，所以 $a_n=n$. 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{n(1+n)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$，则 $S_n+T_n=n^2+2n$.

9. **答案** B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

解析 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象知 $\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\pi}{4}$，解得 $T=\pi$，所以 $\omega=\pm2$. 不妨取 $\omega=2$，令 $2\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，令 $k=0$，得 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 所以 $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=1$，$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，由 $[f(x)-1][f(x)-2]\leqslant0$ 得 $1\leqslant f(x)\leqslant2$. 由 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$.

10. **答案** C

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $b\geqslant0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(f(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即充分性成立. 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不是单调递增，则 $b<0$，$f(f(x))=(x^2+bx)^2+b(x^2+bx)=(x^2+bx)\cdot(x^2+bx+b)$，易知 $y=x^2+bx$ 有零点 0 和 $-b$，$y=x^2+bx+b$ 有一正一负两个零点，且正零点不等于 $-b$，于是 $f(f(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点，所以 $f(f(x))$ 在 $(0,+\infty)$ 上不可能单调递增，所以必要性也成立.

11. **答案** A

命题意图 本题考查函数的奇偶性、周期性和单调性的综合应用.

解析 由题意知 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(3^4)=f(81)=f(1)=-\ln1=0$；$f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)=f(-\log_4 3)=f(\log_4 3)$，因为 $\log_4 3\in(0,1)$，所以 $f(\log_4 3)>0$；$f(\log_3 4)=-f(\log_3 4-2)=-f(2-\log_3 4)$，因为 $2-\log_3 4\in(0,1)$，所以 $-f(2-\log_3 4)<0$. 综上可得 $f\left(\log_4\frac{1}{3}\right)>f(3^4)>f(\log_3 4)$.

12. **答案** B

命题意图 本题考查不等式的性质以及基本不等式的应用.

解析 $\frac{xy}{z}=\frac{xy}{x^2-xy+4y^2}=\frac{1}{\frac{x}{y}-1+\frac{4y}{x}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{4y}{x}}-1}=\frac{1}{3}$，当且仅当 $x=2y$ 时等号成立；$6x+12y-5xy-z=6x+12y-4xy-x^2-4y^2=-(x+2y-3)^2+9\leqslant9$，当 $x+2y=3$ 时等号成立. 所以当 $\frac{xy}{z}$ 与 $6x+12y-5xy-z$ 同时取得最大值时，有 $\begin{cases}x=2y,\\x+2y=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{3}{2},\\y=\frac{3}{4},\end{cases}$ 此时 $z=3xy=\frac{27}{8}$.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** $2\sqrt{7}$

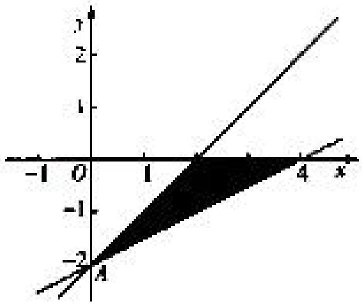
命题意图 本题考查平面向量数量积的应用.

解析 因为 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=4\times2^2-4\times2\times6\times\cos60^\circ+6^2=28$，所以 $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$.

14. **答案** 4

命题意图 本题考查简单的线性规划问题.

解析 作出不等式组表示的平面区域，如图阴影部分所示，由 $z=3x-2y$ 得 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$，由图可知，当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 经过点 $A(0,-2)$ 时，z 取得最小值 4.



15. **答案** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

命题意图 本题考查三角恒等变换的应用.

解析 因为 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，由 $\cos\alpha-3\sin\alpha=1$ 可得 $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}-6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=1$，整理可得 $\sin\frac{\alpha}{2}=-3\cos\frac{\alpha}{2}$，所以 $\tan\frac{\alpha}{2}=-3$，所以 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

16. **答案** 39

命题意图 本题考查数列的概念，是创新题型.

解析 计算可得 $1\times1+2\times2+3\times4+\cdots+10\times2^9=9\ 217$，可知对每道题，要么甲和乙都答对，要么甲和乙都答错. 又 $1+2+4+\cdots+2^9=1\ 023$，$1\ 023-767=256=2\times2^7$，可知乙仅有第 8 题答错，从而甲也仅有第 8 题答错，所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=1+2+\cdots+10-2\times8=39$.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查三角恒等变换、三角函数的图象和性质.

解析 （Ⅰ）$f(x)=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\cos x-\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，……（4分）

所以$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$. ……（5分）

（Ⅱ）由已知得$g(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$.

当$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$时，$2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，

所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，……（8分）

所以$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1\in[-1,2]$，

即$g(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$[-1,2]$. ……（10分）

18. **命题意图** 本题考查等差数列和等比数列的性质、数列求和.

解析 （Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为$q(q<0)$.

因为$3a_1$为a_2,a_3的等差中项，

所以$6a_1=a_2+a_3$，即$6a_1=a_1q+a_1q^2$，……（2分）

又因为$a_1\neq0$，所以$6=q+q^2$，即$q^2+q-6=0$，……（4分）

所以$q=-3$（正值舍去）. ……（6分）

所以$a_n=a_5q^{n-5}=-243\times(-3)^{n-5}=(-3)^n$. ……（8分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$b_n=a_{2n}+a_{2n-1}=(-3)^{2n}+(-3)^{2n-1}=9^n-\frac{9^n}{3}=\frac{2}{3}\times9^n$，……（10分）

所以$\{b_n\}$是以6为首项，9为公比的等比数列，

所以$T_n=\frac{6\times(1-9^n)}{1-9}=\frac{3}{4}\times(9^n-1)$. ……（12分）

19. **命题意图** 本题考查三角恒等变换、正弦定理与余弦定理的应用.

解析 （Ⅰ）由$a\cos C-c\cos(B+C)=-\frac{b}{3\cos(A+B)}$，得$a\cos C+c\cos A=\frac{b}{3\cos C}$，……（1分）

由正弦定理得$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\frac{\sin B}{3\cos C}$，……（2分）

所以$\sin(A+C)=\frac{\sin B}{3\cos C}$，……（3分）

所以$\sin B=\frac{\sin B}{3\cos C}$，……（4分）

又$\sin B\neq0$，所以$\cos C=\frac{1}{3}$. ……（5分）

所以 $\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)若 $c=3$,由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$, ……………………………… (7 分)

则 $a=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A, b=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B$, ……………………………………………………………… (8 分)

则 $ab=\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin A\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\sin B=\frac{162}{16}\sin A\sin B=\frac{162}{16}\times\frac{16}{27}=6$, ……………………………… (10 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$. ……………………………………………… (12 分)

20. **命题意图** 本题考查函数模型、导数的应用.

解析 (Ⅰ)设 $AA_1=a$ dm.

由题意得 $(2r)^2-\pi r^2+(2r)^2+8ar=16$, ……………………………………………………………… (1 分)

可得 $a=\frac{16+(\pi-8)r^2}{8r}$, ……………………………………………………………………………… (2 分)

所以 $V=(2r)^2a=8r+\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^3$. ……………………………………………………………… (3 分)

由 $a>0$,得 $\frac{16+(\pi-8)r^2}{8r}>0$,解得 $0<r<\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}$. ……………………………………………… (5 分)

因此 $V=8r+\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^3, r\in\left(0,\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$. ……………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ) $V'=8+3\left(\frac{\pi}{2}-4\right)r^2$.

令 $V'>0$,得 $0<r<\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$;令 $V'<0$,得 $\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}<r<\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}$.

所以 V 在 $\left(0,\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}},\frac{4}{\sqrt{8-\pi}}\right)$ 上单调递减. ……………………… (8 分)

所以当 $r=\frac{4}{\sqrt{3(8-\pi)}}$ 时,V 取最大值,此时 $a=\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$,

即该容器的高 AA_1 为 $\frac{\sqrt{3(8-\pi)}}{3}$ dm 时,V 取最大值. ……………………………………………… (12 分)

21. **命题意图** 本题考查递推数列,以及等差数列与等比数列的综合应用.

解析 (Ⅰ)由题意得 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n^2+b_n^2}{a_nb_n}=\frac{b_{n+1}}{a_nb_n}$,即 $a_{n+1}b_{n+1}=2a_nb_n$, ……………………… (2 分)

所以 $\{a_nb_n\}$ 是以 $a_1b_1=4$ 为首项,2 为公比的等比数列, ……………………………………………… (3 分)

所以 $a_nb_n=2^{n+1}$. ……………………………………………………………………………………… (5 分)

(Ⅱ)因为 $\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{b_n}{a_n}+\frac{a_n}{b_n}\geqslant 2\sqrt{\frac{b_n}{a_n}\times\frac{a_n}{b_n}}=2$,所以 $0<a_{n+1}\leqslant 1$.(*)……………………

设$\{a_n\}$的公差为d,

若$d>0$,则当$n>\frac{1-a_1}{d}$时,有$a_{n+1}=a_1+nd>1$,与(*)矛盾;

若$d<0$,则当$n>-\frac{a_1}{d}$时,有$a_{n+1}=a_1+nd<0$,与(*)矛盾.

于是$d=0$,即$a_n=a_1$,所以$0<a_1\leqslant 1$. ······ (8分)

又$b_{n+1}=a_n+b_n-1=b_n+a_1-1$,所以$\{b_n\}$是以$a_1-1$为公差的等差数列.

若$a_1\neq 1$,则$a_1<1$,所以$b_{n+1}<b_n$. ······ (9分)

又由$\frac{2}{a_1}=\frac{b_n}{a_1}+\frac{a_1}{b_n}$可得$b_n=1\pm\sqrt{1-a_1^2}$,

因此$\{b_n\}$中的项最多有两个值,与$b_{n+1}<b_n$矛盾,故$a_1=1$. ······ (10分)

从而$b_n=1\pm\sqrt{1-a_1^2}=1$. ······ (11分)

综上,$a_n=1$,$b_n=1$. ······ (12分)

22. **命题意图** 本题考查导数的几何意义、利用导数研究函数性质.

解析 (Ⅰ)函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+2=\ln x+3$, ······ (1分)

则切线的斜率为$\ln x_0+3$, ······ (2分)

又$f(x_0)=x_0\ln x_0+2x_0-1$,

所以函数$f(x)$的图象在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$y-(x_0\ln x_0+2x_0-1)=(\ln x_0+3)(x-x_0)$,

即$(\ln x_0+3)x-y-x_0-1=0$,其在y轴上的截距为$-x_0-1$, ······ (4分)

所以$-x_0-1=-2$,解得$x_0=1$. ······ (5分)

(Ⅱ)$a(x-1)<f(x)$即$a(x-1)<x\ln x+2x-1$,

又$x>1$,所以$x-1>0$,可得$a<\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$对于$x\in(1,+\infty)$恒成立. ······ (6分)

当$x>1$时,令$g(x)=\frac{x\ln x+2x-1}{x-1}$,则$g'(x)=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$.

再令$h(x)=x-\ln x-2$,则$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$,

所以$h(x)=x-\ln x-2$在$(1,+\infty)$上单调递增; ······ (7分)

又$h(3)=1-\ln 3<0$,$h(4)=2(1-\ln 2)>0$,所以$\exists x_0\in(3,4)$使$h(x_0)=0$,

即$\exists x_0\in(3,4)$使$x_0-2=\ln x_0$. ······ (9分)

当$1<x<x_0$时,$h(x)<0$,$g'(x)<0$;当$x>x_0$时,$h(x)>0$,$g'(x)>0$,

所以$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增.

所以$g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+2x_0-1}{x_0-1}=\frac{x_0(x_0-2)+2x_0-1}{x_0-1}=x_0+1$, ······ (11分)

所以$a<x_0+1$,

又因为$x_0+1\in(4,5)$,所以实数a的最大整数值是4. ······ (12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。