绝密★启用并使用完毕前

2023年3月济南市高三模拟考试

数学试题

本试卷共4页，22题，全卷满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

准考证号______ 姓名______ 学校______

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.复数 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 的虚部为

A. -1　　B. $-i$　　C. i　　D. 1

2.已知集合 $A=\{x \mid y=\sqrt{x-2}\}$，$B=\{x \mid x\geqslant a\}$，若 $A\subseteq B$，则 a 的取值范围为

A. $a\leqslant 2$　　B. $a\geqslant 2$　　C. $a\leqslant 0$　　D. $a\geqslant 0$

3.已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 T_n，$a_1=16$，公比 $q=\dfrac{1}{2}$，则 T_n 取最大值时 n 的值为

A. 3　　B. 6　　C. 4或5　　D. 6或7

4.用一个平行于圆锥底面的平面去截圆锥，截得的圆台上底面半径为1，下底面半径为2，且该圆台侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$，则原圆锥的母线长为

A. 2　　B. $\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

5.从正六边形的6个顶点中任取3个构成三角形，则所得三角形是直角三角形的概率为

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{5}$　　D. $\dfrac{9}{10}$

6.已知正三角形边长为2，用斜二测画法画出该三角形的直观图，则所得直观图的面积为

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{6}$

7.自然数 2^{2023} 的位数为(参考数据：$\lg2\approx0.3010$)

A.607　　B.608　　C.609　　D.610

8.函数 $f(x)=a^x+(a+2)^x-2(a+1)^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的零点个数为

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

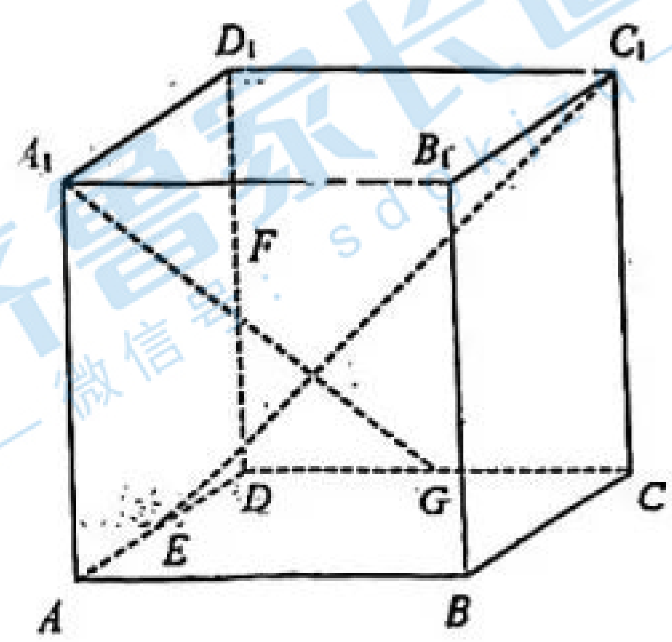
二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9.已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$, $\boldsymbol{b}=(-2,1)$,则

A. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{10}$　　B. $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$

C. $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角　　D. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的模为 $\frac{\sqrt5}{5}$

10.如图,棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E,F,G 分别是棱 AD,DD_1,CD 的中点,则



A.直线 A_1G 、C_1E 为异面直线

B. $V_{D_1-BEF}=\frac{1}{3}$

C.直线 A_1G 与平面 ADD_1A_1 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt2}{4}$

D.过点 B,E,F 的平面截正方体的截面面积为 9

11.在平面直角坐标系 xOy 中,由直线 $x=-4$ 上任一点 P 向椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 作切线,切点分别为 A , B ,点 A 在 x 轴的上方,则

A. $\angle APB$ 恒为锐角

B.当 AB 垂直于 x 轴时,直线 AP 的斜率为 $\frac{1}{2}$

C. $|AP|$ 的最小值为 4

D.存在点 P ,使得 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PO})\cdot\overrightarrow{OA}=0$

12.已知函数 $f_n(x)=\sin^{2n}x+\cos^{2n}x\ (n\in\mathrm{N}^*)$,记 $f_n(x)$ 的最小值为 a_n ,数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,下列说法正确的是

A. $a_2=\frac{1}{2}$　　B. $S_5=\frac{31}{16}$

C. $\sum\limits_{i=1}\ln(1+a_i)<2$　　D.若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{1-\log_2a_n}$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}b_ib_{i+1}b_{i+2}<\frac{1}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.$(x+\frac{2}{x})^6$ 展开式中的常数项为________.

14.在平面直角坐标系 xOy 中，圆 $C_1:x^2+y^2=2$ 关于直线 l 对称的圆为 $C_2:x^2+y^2+2x-4y+3=0$，则 l 的方程为________.

15.已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})(\omega>0)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的值域为 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，则 ω 的取值范围为________.

16.机器学习是人工智能和计算机科学的分支，专注于使用数据和算法来模仿人类学习的方式.在研究时需要估算不同样本之间的相似性，通常采用的方法是计算样本间的“距离”，闵氏距离是常见的一种距离形式.两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的闵氏距离为 $D_p(A,B)=(|x_1-x_2|^p+|y_1-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$，其中 p 为非零常数.如果点 M 在曲线 $y=e^x$ 上，点 N 在直线 $y=x-1$ 上，则 $D_1(M,N)$ 的最小值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10 分)

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x$.

(1)求 $f(x)$ 的单调递减区间；

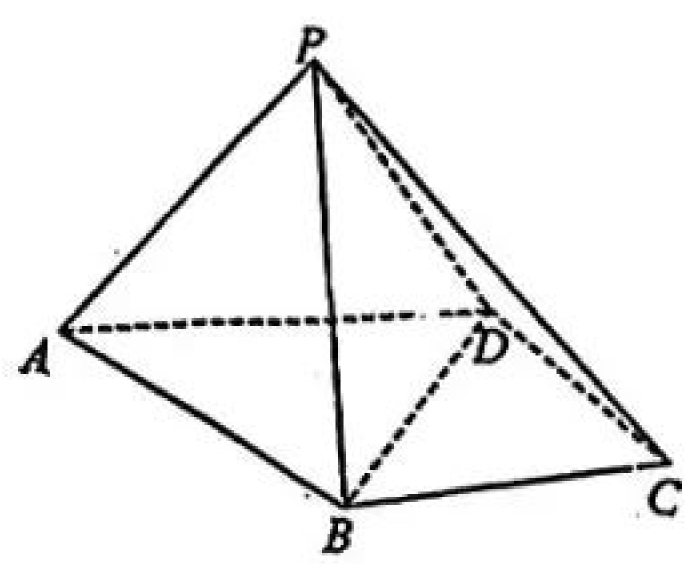
(2) $\triangle ABC$ 中内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$f(A)=2$，$b=3$，$c=2$，求 A 的内角平分线 AD 的长.

18.(12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 是等边三角形，$PA=PB=PD$，$BC=CD$.

(1)证明：$BD\perp PC$；

(2)若 $BD=2\sqrt{3}$，$CD=AP=\sqrt{7}$，求点 A 到平面 PCD 的距离.



19.(12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$na_{n+1}-(n+1)a_n=1$.

(1)若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1+a_n}{n}$，证明：$\{b_n\}$ 是常数数列；

(2)若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\sin(\frac{\pi}{2}a_n)+2^{a_n}$，求 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}.

20.(12 分)

为了切实加强学校体育工作，促进学生积极参加体育锻炼，养成良好的锻炼习惯，某高中学校计划优化课程，增加学生体育锻炼时间，提高体质健康水平.某体质监测中心抽取了该校 10 名学生进行体质测试，得到如下表格：

序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
成绩 x_i（分）	38	41	44	51	54	56	58	64	74	80

记这 10 名学生体质测试成绩的平均分与方差分别为 $\bar{x}$，s^2.经计算，$\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=1690$，$\sum\limits_{i=1}^{10}x_i^2=33050$.

(1)求 $\bar{x}$；

(2)规定体质测试成绩低于 50 分为不合格，从这 10 名学生中任取 3 名，记体质测试成绩不合格的人数为 X，求 X 的分布列；

(3)经统计，高中生体质测试成绩近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，用 $\bar{x}$，s^2 的值分别作为 μ，σ^2 的近似值，若监测中心计划从全市抽查 100 名高中生进行体质测试，记这 100 名高中生的体质测试成绩恰好落在区间 $[30,82]$ 的人数为 Y，求 Y 的数学期望 $E(Y)$.

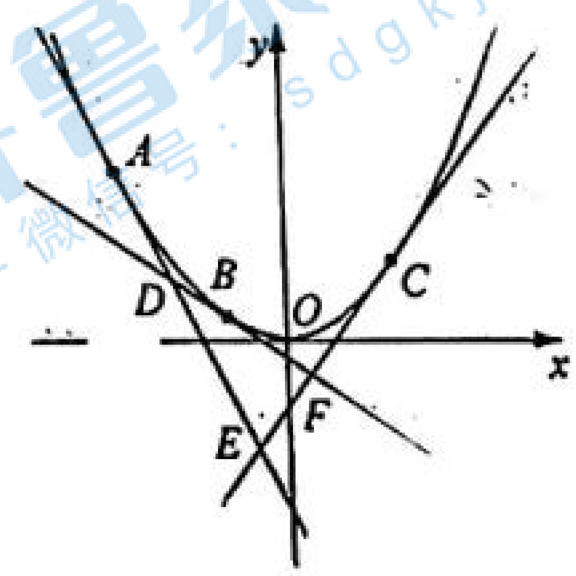
附：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+3\sigma)\approx0.9973$.

21.(12 分)

已知抛物线 H：$x^2=2py$（p 为常数，$p>0$）.

(1)若直线 l：$y=kx-2pk+2p$ 与 H 只有一个公共点，求 k；

(2)贝塞尔曲线是计算机图形学和相关领域中重要的参数曲线.法国数学家卡斯特利奥对贝塞尔曲线进行了图形化应用的测试，提出了 de Casteljau 算法：已知三个定点，根据对应的比例，使用递推画法，可以画出抛物线.反之，已知抛物线上三点的切线，也有相应成比例的结论.如图，A,B,C 是 H 上不同的三点，过三点的三条切线分别两两交于点 D,E,F，证明：$\dfrac{|AD|}{|DE|}=\dfrac{|EF|}{|FC|}=\dfrac{|DB|}{|BF|}$.



22.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\dfrac{a}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}-2ax$.

(1)当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围；

(3)若 $f(x)$ 的最小值为 1，求 a.